RMS 2004 [2]

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère le polynôme

$$P_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$

$\boxed{1}$ *Combien de racines réelles le polynôme P_n a-t-il ?*
$\boxed{2}$ *On note ρ_n, l'unique racine de P_n qui appartienne à $]0, +\infty[$. Déterminer la limite de ρ_n lorsque n tend vers $+\infty$.*
$\boxed{3}$ *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une racine de P_n distinctes de ρ_n. Démontrer que $|\lambda| < \rho_n$.*

$\boxed{1}$ Pour $x \neq 1$, l'équation $P_n(x) = 0$ équivaut à

$$x^n = \frac{x^n - 1}{x - 1},$$

c'est-à-dire à

$$(x-2)x^n = -1. \tag{1}$$

❧ Comme $P_n(0) = -1$, le réel $x = 0$ n'est pas une racine de P_n.

Pour $x > 0$, le facteur x^n est strictement positif et, pour une raison de signe, l'équation (1) impose $x < 2$.

Pour $x < 0$ et n impair, le facteur x^n est strictement négatif, de même que le facteur $(x-2)$ et l'équation (1) est impossible.

Pour $x < 0$ et n pair, les deux membres de l'équation (1) sont de même signe. Mais si $x \leqslant -1$, alors $|x-2| \geqslant 3$ et $|x^n| \geqslant 1$, donc $|(x-2)x^n| \geqslant 3$ et l'équation (1) est impossible.

On vient de prouver que les racines réelles de P_n sont toutes comprises entre -1 et 2.

❧ Affinons l'étude précédente en étudiant les variations de la fonction f_n définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (x-2)x^n.$$

Il est clair que

$$f_n(-1) = (-1)^{n+1} \cdot 3, \quad f_n(0) = 0, \quad f_n(1) = -1, \quad f_n(2) = 0 \tag{2}$$

et que

$$f_n'(x) = \big[(n+1)x - 2n\big]x^{n-1}.$$

❧ Pour $x > 0$, la fonction f_n est donc décroissante sur l'intervalle $]0, \alpha_n]$ et croissante sur l'intervalle $[\alpha_n, +\infty[$ avec

$$\alpha_n = \frac{2n}{n+1}. \tag{3}$$

On peut appliquer le Théorème de la bijection sur ces deux intervalles.

L'équation (1) admet donc une unique solution sur $]0, \alpha_n]$, mais il s'agit de $x = 1$ et ce n'est pas une racine de P_n.

Elle admet une unique solution sur $[\alpha_n, +\infty[$, qui est donc l'unique racine strictement positive de P_n (c'est-à-dire ρ_n), et les valeurs de f_n qu'on a calculées (2) nous permettent de préciser :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \alpha_n < \rho_n < 2. \tag{4}$$

❧ Pour $-1 < x < 0$ et n pair,

$$f_n'(x) = \underbrace{\big[(n+1)x - 2n\big]}_{<0}\, \underbrace{x^{n-1}}_{<0} > 0.$$

D'après (2), la fonction f_n réalise une bijection de $]-1, 0[$ sur $]-3, 0[$. L'équation (1) admet donc une, et une seule, solution dans l'intervalle $]-1, 0[$.

❧ **Conclusion —** Pour n pair, le polynôme P_n admet exactement deux racines réelles : une racine dans l'intervalle $]\alpha_n, 2[\subset]0, +\infty[$ et l'autre dans l'intervalle $]-1, 0[$.

Pour n impair, le polynôme P_n admet exactement une racine réelle, comprise entre α_n et 2.

Dans tous les cas, ce polynôme admet exactement une racine dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

2❧ D'après (4) et (3), la suite de terme général ρ_n converge vers 2.

✍ *En tant que fonction, le polynôme P_n est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comme P_n tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et que P_n ne s'annule pas dans l'intervalle $]\rho_n, +\infty[$,*

$$\forall\, x > \rho_n, \qquad P_n(x) > 0$$

(Théorème des valeurs intermédiaires).

3❧ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une racine de P_n. Par définition de P_n et inégalité triangulaire,

$$|\lambda|^n = |\lambda^n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda|^k. \tag{5}$$

Autrement dit : $P_n(|\lambda|) \leqslant 0$ et on déduit de la remarque précédente que

$$|\lambda| \leqslant \rho_n.$$

❧ Plus précisément, si $P_n(|\lambda|) = 0$, alors on serait dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. Cela n'arrive que si tous les termes λ^k ont même argument ! Il faudrait donc que $\lambda^0 = 1$ et $\lambda^1 = \lambda$ aient même argument et donc que $\lambda \in]0, +\infty[$.

On a démontré que P_n admettait ρ_n comme seule racine réelle strictement positive.

Par conséquent, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une racine de P_n distincte de ρ_n, alors l'inégalité triangulaire (5) est stricte, donc $P_n(|\lambda|) < 0$ et finalement

$$|\lambda| < \rho_n.$$