Séries de fonctions [92.]

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \Omega =]0, +\infty[$, on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+nx}.$$

Chaque fonction u_n est continue sur Ω (fonction rationnelle de x, dont le dénominateur reste strictement positif sur Ω).

Pour tout $x \in \Omega$, la suite de terme général

$$|u_n(x)| = \frac{1}{1+nx}$$

tend vers 0 en décroissant. On peut alors déduire du Critère spécial des séries alternées que la série $\sum u_n(x)$ est convergente (la série de fonctions $\sum u_n$ converge donc simplement sur Ω) ainsi que la domination suivante du reste :

$$\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)x}. \qquad (\star)$$

Pour tout $a > 0$, on pose

$$V_a = [a, +\infty[.$$

On déduit alors de $(\star)$ que

$$\forall\, x \in V_a,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)a}.$$

Le majorant est indépendant de x et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, cela prouve donc que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur chaque intervalle V_a.

Par conséquent, la somme S de cette série est continue sur

$$\Omega = \bigcup_{a>0} V_a.$$

❧ Nous allons maintenant appliquer deux fois le Théorème de passage à la limite terme à terme.

❧ Lorsque x tend vers $+\infty$, il est clair que $u_0(x)$ tend vers 1 et que $u_n(x)$ tend vers 0 pour tout entier $n \geqslant 1$. Comme la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur V_1 (= un voisinage de $+\infty$), on en déduit que la somme S admet une limite finie au voisinage de $+\infty$ et que

$$\lim_{x \to +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} u_n(x) = 1.$$

❧ En revanche, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions u_n sont des applications de Ω dans $\mathbb{R}$ (= un espace vectoriel de dimension finie) et tendent vers une limite finie au voisinage de 0 :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \to 0} u_n(x) = (-1)^n.$$

Comme la série $\sum (-1)^n$ diverge, alors la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur Ω (par contraposée du Théorème de passage à la limite terme à terme).

❧ Petit complément de programme : nous allons calculer un développement asymptotique de S au voisinage de $+\infty$.

Intuitivement, on se doute que

$$S(x) - 1 \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx}$$

lorsque x tend vers $+\infty$. Pour en avoir le cœur net, on étudie la différence entre ces deux quantités :

$$\begin{aligned} S(x) - 1 - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{1+nx} - \frac{1}{nx} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx(1+nx)}. \end{aligned}$$

Comme la suite de terme général

$$\frac{1}{nx(1+nx)}$$

tend vers 0 en décroissant pour tout $x \in \Omega$, on peut appliquer à nouveau le Critère spécial des séries alternées :

$$\forall\, x \in \Omega, \qquad \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx(1+nx)} \right| \leqslant \frac{1}{x(1+x)}$$

ce qui prouve en particulier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx(1+nx)} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

lorsque x tend vers $+\infty$. On a ainsi démontré que

$$S(x) = 1 + \frac{K}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

lorsque x tend vers $+\infty$, où

$$K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$