Intégrales à paramètres [20.]

❧ Pour tout $x > 0$, la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{\cos t}{t+x}\right]$$

est continue sur le segment $I = [0, \pi/2]$, donc elle est intégrable sur ce segment. La fonction F est donc bien définie sur $\Omega =]0, +\infty[$.

❧ Pour tout $t \in I = [0, \pi/2]$, on a $\cos t \geqslant 0$ et pour $0 < x < y$,

$$0 \leqslant \frac{\cos t}{t+y} \leqslant \frac{\cos t}{t+x}.$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\forall\, 0 < x < y, \quad 0 \leqslant F(y) \leqslant F(x)$$

ce qui montre que la fonction F est décroissante sur $\Omega =]0, +\infty[$.

❧ On a déjà prouvé que la fonction F était définie (au sens propre) sur Ω. Pour tout $t \in I$, la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{\cos t}{t+x}\right]$$

est clairement continue sur Ω.

Enfin, pour tout $a > 0$,

$$\forall\, x \in [a, +\infty[\,,\ \forall\, t \in I, \quad \left|\frac{\cos t}{t+x}\right| \leqslant \frac{\cos t}{t+a}$$

où le second membre est indépendant de x et intégrable sur I (déjà vu !).

Cela prouve que F est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ et donc continue sur $\Omega =]0, +\infty[$.

❧ Pour tout $t \in I$ et tout $x > 0$, il est clair que

$$0 \leqslant \frac{\cos t}{t+x} \leqslant \frac{\cos t}{x}.$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{\pi/2} \cos t \,dt = \frac{1}{x}.$$

Par encadrement, on a démontré que F tendait vers 0 au voisinage de $+\infty$.

❧ On peut préciser l'étude précédente en intégrant par parties. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{\sin t}{t+x}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{(t+x)^2}\,dt \\ &= \frac{1}{x+\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{(t+x)^2}\,dt. \end{aligned}$$

Cela étant, il est clair que

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, t \in I, \quad 0 \leqslant \frac{\sin t}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

et donc que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{(t+x)^2}\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

D'autre part, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{x+\pi/2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{\pi}{2x}} = \frac{1}{x}-\frac{\pi}{2x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{1}{x}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

On en déduit ainsi que

$$F(x) = \frac{1}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

lorsque x tend vers $+\infty$. (Ce qui confirme que la fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.)

REMARQUE.— Lorsque x tend vers $+\infty$, il est clair que

$$\frac{1}{x+\pi/2} \sim \frac{1}{x} \quad \text{et donc que} \quad \frac{1}{x+\pi/2} = \frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

mais si on se contente d'un tel développement, on peut seulement conclure que

$$F(x) = \frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

ce qui est moins précis que le développement demandé par l'énoncé !

❧ Une autre intégration par parties va nous donner l'ordre de grandeur de F au voisinage de 0. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \big[\cos t \cdot \ell n(t+x)\big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \ell n(t+x)\,dt \\ &= -\ell n\, x + \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \ell n(t+x)\,dt. \end{aligned}$$

Par concavité du logarithme, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \ell n(t+x) &= \ell n\, t + \ell n\Big(1+\frac{x}{t}\Big) \\ &\leqslant \ell n\, t + \frac{x}{t}. \end{aligned}$$

En outre, la fonction

$$\Big[t \mapsto \frac{\sin t}{t}\Big]$$

peut être prolongée en une fonction continue sur le segment I (puisqu'elle tend vers une limite finie, égale à 1, au voisinage de $t = 0$) et est donc intégrable sur I.

Par linéarité de l'intégrale et par l'inégalité de la moyenne, on en déduit que

$$\left|\int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \ell n(t+x)\,dt - \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \ell n\, t\,dt\right|$$

est majorée par

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x \sin t}{t}\,dt = x\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Comme l'intégrale ne dépend pas du paramètre x, on en déduit que

$$\int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \ell n(t+x)\,dt = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \ell n\, t\,dt}_{K} + \mathcal{O}(x)$$

et en particulier que

$$F(x) = -\ell n\, x + K + \mathcal{O}(x) = -\ell n\, x + \mathcal{O}(1)$$

lorsque x tend vers 0.

Ce développement asymptotique démontre en particulier que F tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

Remarque.— On peut démontrer que F tend vers $+\infty$ au voisinage de 0 sans ce développement asymptotique, mais c'est sensiblement plus délicat.

Tout d'abord, on sait que la fonction F est décroissante sur $]0, +\infty[$. Elle tend donc vers une limite, *finie ou infinie*, au voisinage de 0.

Pour $\alpha > 0$, posons

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad G_\alpha(x) = \int_\alpha^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\, dt.$$

La domination vue plus haut pour la continuité de F devient :

$$\forall\, x \geqslant 0,\ \forall\, t \in [\alpha, \pi/2], \quad 0 \leqslant \frac{\cos t}{t+x} \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

Les fonctions constantes étant intégrables sur le segment $[\alpha, \pi/2]$, on en déduit que la fonction G_α est continue sur $[0, +\infty[$ et en particulier que

$$G_\alpha(x) \xrightarrow[x \to 0]{} G_\alpha(0) = \int_\alpha^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\, dt.$$

La fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\cos t}{t}\right]$$

est *continue* et *positive* sur $]0, \pi/2]$ et

$$\frac{\cos t}{t} \sim \frac{1}{t}$$

lorsque t tend vers 0. Par conséquent, cette fonction n'est pas intégrable et

$$G_\alpha(0) = \int_\alpha^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\, dt \xrightarrow[\alpha \to 0]{} +\infty.$$

Fixons maintenant $A > 0$. D'après l'étude précédente, il existe $\alpha_0 > 0$ tel que

$$G_{\alpha_0}(0) = \lim_{x \to 0} G_{\alpha_0}(x) \geqslant A + 1.$$

Il existe donc $x_0 > 0$ tel que

$$\forall\, x \in]0, x_0], \quad G_{\alpha_0}(x) \geqslant A.$$

Comme on intègre une fonction *positive*, on en déduit que

$$\forall\, 0 < x \leqslant x_0, \quad F(x) \geqslant G_{\alpha_0}(x) \geqslant A.$$

On vient de démontrer que F tend vers $+\infty$ au voisinage de 0 !