Convexité [8.1]

❧ Il faut comprendre l'énoncé d'une part comme une caractérisation des parties convexes de $\mathbb{R}$:

une partie de $\mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, c'est un intervalle,

et d'autre part comme l'égalité de deux ensembles :

l'ensemble des parties convexes de $\mathbb{R}$ est égal à l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$.

Cette seconde formulation va structurer notre démonstration : nous allons établir l'égalité de ces ensembles par double inclusion.

❧ Supposons que $I \subset \mathbb{R}$ soit un intervalle.

Considérons deux éléments quelconques x et y de I. Par symétrie, on peut supposer que $x \leqslant y$. Pour tout $t \in [0, 1]$, les deux réels t et $(1-t)$ sont *positifs*, donc

$$(1-t) \leqslant (1-t)y \quad \text{et} \quad tx \leqslant ty.$$

On en déduit que

$$(1-t)x + tx \leqslant (1-t)x + ty \leqslant (1-t)y + ty$$

c'est-à-dire

$$x \leqslant (1-t)x + ty \leqslant y.$$

Comme I est un intervalle, cet encadrement montre que $(1-t)x + ty$ appartient à I.

On a ainsi prouvé que tout intervalle I de $\mathbb{R}$ était une partie convexe.

❧ Réciproquement, supposons que I soit une partie convexe (non vide) de $\mathbb{R}$.

Rappel : Pour prouver que I est un intervalle, nous choisissons arbitrairement deux éléments x et y de I tels que $x \leqslant y$ et nous devons prouver que tout réel z tel que $x \leqslant z \leqslant y$ appartient encore à I.

Choisissons donc deux réels $x \leqslant y$ dans I et considérons un réel z tel que $x \leqslant z \leqslant y$.

Premier cas (très particulier) : si $x = y$, alors $z = x \in I$.

Deuxième cas (général) : si $x < y$, alors on pose

$$t = \frac{z-x}{y-x}.$$

Comme $x < y$ et que $x \leqslant z \leqslant y$, alors $y - x > 0$ (*on ne divise pas par 0, c'est mal*) et $0 \leqslant z-x \leqslant y-x$, donc $0 \leqslant t \leqslant 1$ et par ailleurs

$$(1-t)x + ty = \frac{[(y-x)-(z-x)]x + (z-x)y}{y-x} = z.$$

Comme I est convexe, cela prouve que $z \in I$.

Dans *tous* les cas, le réel z appartient bien à I, ce qui prouve que I est bien un intervalle.

❧ Si vous connaissez bien les définitions de *partie convexe* et d'*intervalle*, cette démonstration est facile à comprendre. Si quelque chose vous échappe, relisez les définitions et dégagez le plan de la démonstration afin d'en saisir le sens général.

Même si la démonstration vous paraît claire, l'apparition subite du paramètre t dans la dernière partie doit vous interroger : *mais d'où sort donc ce paramètre* t *?*

Cette (excellente !) question est l'occasion de distinguer clairement la phase de recherche (**analyse**) et la phase de rédaction (**synthèse**) : on vous demande une démonstration intelligemment rédigée, on ne vous demande pas d'exposer vos secrets de fabrication !

Secrets de fabrication : dans cette dernière partie, il faut démontrer que le réel z est bien une combinaison convexe de x et y, c'est-à-dire (définition !) qu'il existe un certain réel $t \in [0, 1]$ tel que

$$z = (1 - t)x + ty.$$

Soit ! Si jamais un tel réel t existait, que pourrions-nous en déduire ? (Veuillez noter l'emploi du conditionnel.) Eh bien, nous pourrions en déduire que

$$z = x + t(y - x)$$

c'est-à-dire que, *nécessairement*,

$$t = \frac{z - x}{y - x}.$$

Cela prouve qu'il existe *au plus* un réel t convenable et nous venons de calculer *la seule valeur possible* de ce réel. Yapuka vérifier que cette seule valeur possible de t répond effectivement au problème posé : c'est ce qu'il suffit de rédiger pour produire une démonstration rigoureuse.

Et c'est parce que cette seule valeur possible fait apparaître $(y - x)$ au dénominateur qu'on pense à discuter du cas $x = y$ (*on ne divise pas par* 0*, c'est mal*).