> *Soit E, un espace euclidien. On considère une famille de vecteurs $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que*
>
> $$\forall\, x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle\, e_k \,|\, x \,\rangle^2.$$
>
> **1❧** *La famille $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ engendre E et*
>
> $$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \|e_k\| = 1.$$
>
> **2❧** *Si les vecteurs e_k sont tous unitaires, alors la famille $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormée de E.*

✍ *On doit savoir que*

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle\, e_k \,|\, x \,\rangle^2$$

pour toute base orthonormée $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ d'un espace euclidien E.

On démontre ici que cette propriété est une caractérisation des bases orthonormées parmi l'ensemble des familles de vecteurs unitaires.

On notera qu'on ne suppose pas que le cardinal de la famille est égal à la dimension de l'espace — cela fait partie des propriétés qu'on établit !

1❧ Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Si $x \in F^\perp$, alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \langle\, e_k \,|\, x \,\rangle = 0$$

et par hypothèse,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle\, e_k \,|\, x \,\rangle^2 = 0,$$

donc $x = 0_E$. Par conséquent, $F^\perp = \{0_E\}$ et comme E est un espace euclidien, on en déduit que $F = E$, c'est-à-dire

$$E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

✍ *Si E était un espace préhilbertien de* dimension infinie, *la propriété $F^\perp = \{0_E\}$ ne suffirait pas pour prouver que $F = E$ — cette propriété est commune à tous les sous-espaces vectoriels denses dans E.*

*Le cours de Topologie établira qu'*un sous-espace de dimension finie est fermé. *Comme le sous-espace F est engendré par une famille de n vecteurs, c'est un sous-espace de dimension finie, donc il est fermé, et la propriété $F^\perp = \{0_E\}$ prouve alors que $F = E$.*

Autrement dit : si on connaît le cours de Topologie, on peut traiter l'exercice sans savoir a priori que E est un espace de dimension finie !

❧ De plus, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\begin{aligned}
\|e_i\|^2 &= \sum_{k=1}^{n} \langle\, e_k \,|\, e_i \,\rangle^2 \\
&= \|e_i\|^4 + \sum_{k\neq i} \langle\, e_k \,|\, e_i \,\rangle^2 \\
&\geqslant \|e_i\|^4
\end{aligned}$$

et cette inégalité prouve que $\|e_i\| \leqslant 1$

2❧ Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul.

En supposant que le vecteur e_i soit unitaire, l'inégalité précédente prouve donc que

$$\forall\, k \neq i, \quad \langle\, e_k \,|\, e_i \,\rangle^2 = 0.$$

Cela prouve que les vecteurs de la famille $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont deux à deux orthogonaux.

La famille $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est donc une famille orthonormée qui engendre E, c'est donc une base orthonormée de E.

✍ *Et en particulier* $\dim E = n$.