On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos t) = \cos nt.$$

*La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la famille des **polynômes de Tchebychev** et on admettra que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \deg T_n = n.$$

1❧ *L'application $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ définie par*

$$\forall\, P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad (\,P\,|\,Q\,) = \int_0^\pi P(t)Q(t)\,dt$$

est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.

2❧ *La famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$.*

3❧ *En déduire une base orthonormée de E.*

1❧ Comme P et Q sont des polynômes, la fonction

$$[t \mapsto P(t)Q(t)]$$

est continue sur le segment $[0, \pi]$, donc l'intégrale $(\,P\,|\,Q\,)$ est bien définie.

Il est alors clair que l'application $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ est à valeurs réelles, bilinéaire et symétrique.

Quel que soit $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$(\,P\,|\,P\,) = \int_0^\pi P^2(t)\,dt \geqslant 0$$

(intégrale d'une fonction positive, les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant). De plus, la fonction $[t \mapsto P^2(t)]$ est continue et positive sur le segment $[0, \pi]$. Par conséquent, si $(\,P\,|\,P\,) = 0$, alors $P^2(t) = 0$ pour tout $t \in [0, \pi]$ et comme le polynôme P admet ainsi une infinité de racines, il s'agit du polynôme nul.

L'application $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ est bien un produit scalaire sur E.

✍ *En appliquant le Théorème de changement de variable à $x = \varphi(t) = \cos t$ (la fonction φ réalisant une bijection (décroissante) de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle ouvert $]0, \pi[$ sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$), on obtient d'une part que la fonction*

$$\left[x \mapsto \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

est intégrable sur $]-1, 1[$ (et il s'agit cette fois d'une intégrale généralisée) et d'autre part que

$$(\,P\,|\,Q\,) = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

2❧ Soient $0 \leqslant m < n$. Par définition des polynômes de Tchebychev,

$$\begin{aligned}
(\,T_m\,|\,T_n\,) &= \int_0^\pi T_m(\cos t)T_n(\cos t)\,dt \\
&= \int_0^\pi \cos mt \cos nt\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(m+n)t + \cos(m-n)t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)t}{m+n} + \frac{\sin(m-n)t}{m-n}\right]_0^\pi
\end{aligned}$$

puisque $m+n \geqslant n > 0$ et $m-n < 0$ d'après les hypothèses faites sur m et n. On a ainsi démontré que

$$\forall\, 0 \leqslant m < n, \quad (\, T_m \,|\, T_n \,) = 0$$

donc les polynômes de Tchebychev sont deux à deux orthogonaux pour $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$.

✍ *L'essentiel ici est de bien préciser qu'on ne divise pas par zéro en calculant les primitives !*

3❧ On a admis que la famille des polynômes de Tchebychev était échelonnée en degré au sens où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \deg T_n = n.$$

Donc la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ et d'après la question précédente, c'est une base orthogonale.

Par conséquent, la famille

$$\left(\frac{T_n}{\|T_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est une base orthonormée de E.

✍ *Il y a deux types de* familles échelonnées en degré*, je conseille donc de toujours préciser (comme je l'ai fait) en quelle acception on prend cette notion.*

Premier sens possible : *si la suite $(\deg P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers, alors la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.*

Deuxième sens possible : *si*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \deg P_n = n,$$

alors la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

On notera que, dans les deux cas, on suppose que le degré de chaque polynôme est un entier et donc qu'aucun des polynômes P_n n'est le polynôme nul.