Intégrales

Justifier la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ell n(1-x^2)}{x^2}\,dx$$

et calculer sa valeur au moyen d'une intégration par parties.

⋆

❧ Il est clair que la fonction définie par

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad f(x) = \frac{\ell n(1-x^2)}{x^2}$$

est continue et négative sur l'intervalle $]0,1[$.

Lorsque x tend vers 0,

$$f(x) \sim \frac{-x^2}{x^2} \to -1,$$

ce qui prouve que f admet un prolongement continu sur $[0,1[$ et donc que f est intégrable au voisinage de 0.

Lorsque x tend vers 1, on effectue le changement de variable AFFINE $h = 1-x$. D'après le Théorème du changement de variable, $f(x)$ est intégrable au voisinage de $x=1$ si, et seulement si, $f(1-h)$ est intégrable au voisinage de $h=0$. Or

$$f(x) = f(1-h) = \frac{\ell n(2h-h^2)}{(1-h)^2} = \frac{1}{(1-h)^2}\cdot\Big[\ell n\, h + \ell n\, 2 + \ell n\Big(1-\frac{h}{2}\Big)\Big]$$

donc, lorsque h tend vers 0,

$$f(1-h) \sim \ell n\, h.$$

Comme $\ell n\, h$ est intégrable au voisinage de 0 (fonction de référence), la fonction f est bien intégrable au voisinage de 1.

La fonction f est donc intégrable sur $]0,1[$. En particulier, l'intégrale généralisée de f sur $]0,1[$ est convergente et :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to 1}} \int_\varepsilon^A f(x)\,dx.$$

❧ Essayons d'intégrer par parties avec

$$u(x) = \ell n(1-x^2) \qquad v(x) = \frac{-1}{x}$$
$$u'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} \qquad v'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Lorsque x tend vers 0, le produit

$$u(x)v(x) = \frac{-\ell n(1-x^2)}{x}$$

est équivalent à $-(-x^2)/x = x$ et tend donc vers 0. Mais, lorsque x tend vers 1, ce produit tend vers $+\infty$... Cette intégration par parties est impossible.

❧ Que déduire du calcul précédent ? Pour que le produit $u(x)v(x)$ ait une limite finie lorsque x tend vers 1, il faut qu'il s'agisse d'une forme indéterminée et donc que $v(x)$ tende vers 0.

La seule possibilité pour intégrer par parties est donc :

$$u(x) = \ell n(1-x^2) \qquad v(x) = \frac{-1}{x} + 1 = \frac{x-1}{x}$$
$$u'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} \qquad v'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

On a donc

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad u(x)v(x) = \frac{-(1-x)\,\ell n(1-x^2)}{x} = \frac{-(1-x)\,\ell n(1-x) + (1-x)\,\ell n(1+x)}{x}.$$

Lorsque x tend vers 0, on a encore $u(x)v(x) \sim x$ et lorsque x tend vers 1, cette fois, $u(x)v(x)$ tend vers 0 (les deux termes du numérateur tendent vers 0 et le dénominateur tend vers 1).

La Formule d'intégration par parties nous dit alors que l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx$$

est convergente et que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{x\to 1} u(x)v(x) - \lim_{x\to 0} u(x)v(x) - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = -\int_0^1 \frac{2x(1-x)}{(1-x)(1+x)x}\,dx = -2\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = -2\,\ell n\,2.$$

REMARQUE.— Le résultat trouvé est *négatif*, ce qui est cohérent avec notre remarque initiale sur le signe de $f(x)$.

REMARQUE.— La Formule d'intégration par parties démontre seulement que l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx$$

est convergente, elle ne prouve pas à elle seule que le produit $u'(x)v(x)$ est intégrable sur $]0,1[$.

En fait, ce produit étant négatif (donc *de signe constant*) et l'intégrale généralisée étant *convergente*, on peut conclure que $u'v$ est bien intégrable sur $]0,1[$.

Mais, je le répète, cette propriété n'est pas une conséquence de la Formule d'intégration par parties toute seule !