Soient f, une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) \neq 0$ et

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt.$$

1❧ *On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que*

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}.$$

2❧ *Même question en supposant seulement que f est continue.*

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $[t \mapsto t^n f(t)]$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale I_n est bien définie.

1❧ Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, on va intégrer par parties et, pour alléger les calculs :

$$\begin{aligned}(n+1)I_n &= \int_0^1 (n+1)t^n.f(t)\,dt \\ &= \left[t^{n+1}.f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 t^{n+1}.f'(t)\,dt \\ &= f(1) - \int_0^1 t^{n+1}.f'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0,1[$,

$$\lim_{n\to+\infty} t^{n+1}.f'(t) = 0$$

et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leqslant t < 1, \quad \left|t^{n+1}.f'(t)\right| \leqslant \left|f'(t)\right|.$$

Le majorant est indépendant de n et, en tant que fonction continue sur le segment $[0,1]$, c'est une fonction intégrable sur $[0,1[$.

D'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)I_n = f(1)$$

et comme $f(1) \neq 0$, on en déduit que

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}.$$

✍ *Si $f(1) = 0$, on a en fait démontré que*

$$I_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

✍ *Lorsque n est grand, le produit $t^n.f(t)$ est très proche de 0 sur la plus grande partie du segment $[0,1]$. Au voisinage de $t = 1$, ce produit est peu différent de $t^n.f(1)$ (puisque f est continue au point 1), donc les intégrales*

$$\int_0^1 t^n.f(t)\,dt \quad \textit{et} \quad \int_0^1 t^n.f(1)\,dt = \frac{f(1)}{n+1}$$

sont proches l'une de l'autre. C'est ce qui explique (géométriquement !) l'apparition du facteur $(n+1)$ dans les calculs qui précèdent.

2❧ Pour tout entier n,

$$(n+1)I_n - f(1) = \int_0^1 (n+1)t^n.\left[f(t) - f(1)\right]dt. \qquad (\star)$$

Soit $\varepsilon > 0$, fixé dans tout ce qui suit.

❧ Comme f est continue au point 1, alors il existe $0 < \alpha < 1$ tel que

$$\forall\, t \in [1-\alpha, 1], \quad \left|f(t) - f(1)\right| \leqslant \varepsilon.$$

❧ Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, elle est bornée et par inégalité triangulaire,

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad \left|f(t) - f(1)\right| \leqslant 2\|f\|_\infty.$$

❧ On peut alors déduire de $(\star)$, de l'inégalité triangulaire pour les intégrales et de la relation de Chasles que :

$$\begin{aligned}
\left|(n+1)I_n - f(1)\right| &\leqslant \int_0^1 \left|(n+1)t^n.\left[f(t) - f(0)\right]\right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^{1-\alpha} (n+1)t^n.\left|f(t) - f(0)\right| \mathrm{d}t \\
&\qquad + \int_{1-\alpha}^1 (n+1)t^n.\left|f(t) - f(0)\right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant 2\|f\|_\infty\,(1-\alpha)^{n+1} + \varepsilon \cdot \left[1 - (1-\alpha)^{n+1}\right] \\
&\leqslant 2\|f\|_\infty\,(1-\alpha)^{n+1} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme $0 < 1 - \alpha < 1$, le terme $2\|f\|_\infty\,(1-\alpha)^{n+1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Il existe donc un rang n_0 tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant 2\|f\|_\infty\,(1-\alpha)^{n+1} \leqslant \varepsilon.$$

❧ On a donc prouvé que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \left|(n+1)I_n - f(1)\right| \leqslant 2\varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \to +\infty} (n+1)I_n = f(1).$$

Comme plus haut, si $f(1) \neq 0$, on en déduit que

$$I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}.$$