4
Probabilités discrètes

I
Lois discrètes

1. Lois usuelles

1.1 Si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors

$$\mathbf{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = np(1-p).$$

1.2 Si X suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, alors

$$\mathbf{E}(X) = {}^{1}\!/_{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = {}^{q}\!/_{p^2}.$$

1.3 Si X suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, alors $\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda$.

2. On suppose que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.
Que vaut $\mathbf{P}(X = 0)$? Que vaut l'espérance de X ?

3. Soit X, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $\mathbf{P}(X = 0) > 0$ et que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k+1) = \frac{1}{2}\,\mathbf{P}(X = k).$$

Que vaut $\mathbf{P}(X = 0)$?

4. Soit X, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe un réel α tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{\alpha}{n(n+1)}.$$

Que vaut α ? La variable aléatoire X est-elle une variable aléatoire d'espérance finie ?

5. Soit X, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe un réel α tel que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(X \geqslant n) = \frac{\alpha}{n^2}.$$

Que vaut α ? La variable aléatoire X est-elle une variable aléatoire d'espérance finie ?

6. Soit X, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. La famille

$$\big([X = n]\big)_{n \in \mathbb{N}}$$

est-elle un système complet d'évènements ? Et la famille

$$\big([X \geqslant n]\big)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ?}$$

7. Soit X, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$p_n = \mathbf{P}(X = n).$$

7.1 Si

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+2} = p_{n+1} - \frac{3}{16} p_n,$$

alors il existe α et β tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \frac{\alpha + 3^n \beta}{4^n}.$$

De plus,

$$\frac{1}{3}\alpha + \beta = \frac{1}{4}.$$

7.2 Si

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+2} = p_{n+1} - \frac{1}{4} p_n,$$

alors il existe α et β tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \frac{\alpha + n\beta}{2^n}.$$

II
Modèles aléatoires univariés

8. Une urne contient initialement une boule N et une boule B. On joue à Pile ou Face :

— si on tombe sur Face, alors on ajoute une boule N dans l'urne ;

— si on tombe sur Pile, alors on tire une boule au hasard dans l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule B ?
On introduira l'événement A_n : "on obtient Pile pour la première fois au n-ième lancer".

9. On considère des urnes numérotées de 0 à N (inclus), l'urne k contenant k boules B et $(n-k)$ boules N. On choisit une urne au hasard et on pioche une boule.
Pour $0 \leqslant k \leqslant N$, on note U_k, l'événement : "on choisit l'urne k".

9.1 La probabilité $\mathbf{P}(A_n)$ pour que les n premiers tirages amènent tous une boule B est égale à

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \Big(\frac{k}{N}\Big)^n.$$

9.2 On note X, le nombre de boules B obtenues en n tirages.
Pour tout $0 \leqslant k \leqslant N$,

$$\mathbf{E}_{U_k}(X) = n \cdot \frac{k}{N}$$

et d'après la Formule de l'espérance totale, le nombre moyen de boules B obtenues en n tirages est égal à

$$\frac{n}{2} = n \cdot \mathbf{P}(A_1).$$

On peut aussi considérer que X est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres respectifs $\mathbf{P}(A_1)$.

9.3 Sachant que les n premiers tirages ont amené une boule B, la probabilité pour que le $(n+1)$-ième tirage amène encore une boule B est égale à

$$\mathbf{P}(B \mid A_n) = \frac{\mathbf{P}(A_{n+1})}{\mathbf{P}(A_n)}.$$

10. Oral CCINP (****)
On dispose de 100 dés, parmi lesquels 25 sont truqués. Pour ces dés truqués, la probabilité d'obtenir 6 est égale à ${}^{1}\!/_{2}$.

10.1 On choisit un dé, on le lance et on obtient 6 : la probabilité que ce dé soit truqué est égale à ${}^{1}\!/_{2}$.

10.2 On relance le dé et on obtient à nouveau 6 : la probabilité que ce dé soit truqué est alors égale à ${}^{3}\!/_{4}$.

11. (****)
Dans un saloon du Far West, la proportion de tricheurs est égale à $0 < p < 1$. Par définition, un tricheur est sûr de tirer un as dans un jeu de 52 cartes.

11.1 Pour un non-tricheur, quelle est la probabilité de tirer un as dans un jeu de 52 cartes ?
11.2 Un individu tire un as. Quelle est la probabilité pour que ce soit un tricheur ?
11.3 On choisit un individu au hasard dans le saloon. Quelle est la probabilité pour que ce soit un tricheur ? pour qu'il tire un as ?
11.4 Un individu tire deux as de suite. Quelle est la probabilité pour que ce soit un tricheur ?

12. Veto 2003
Un joueur dispose de N euros. À chaque fois qu'il introduit une pièce d'un euro dans une machine à sous, la machine lui rend R euros :

$$\mathbf{P}(R=0)=a, \quad \mathbf{P}(R=2)=b, \quad \mathbf{P}(R=3)=c.$$

Initialement, la machine contient $S > 3N$ euros et elle s'arrête de fonctionner quand elle ne contient moins de deux euros.
On note X_n, le montant détenu par le joueur à l'issue de la n-ième partie. En particulier, $X_0 = N$.
12.1 On a $X_1 = R_1 - 1$ et $X_2 = R_1 + R_2 - 2$. Préciser les lois de X_1 et de X_2.
12.2 Pour tout $n \leqslant N$,

$$\mathbf{E}(X_n) - N = n\big(\mathbf{E}(X_1) - N\big).$$

(Interpréter $X_n - N$ comme une somme de n variables aléatoires de même loi.)

13. Veto 2003
Dans un cheptel, la probabilité de détecter un problème sanitaire quelconque un jour donné est égale à $p = 0,05$. D'autre part, la probabilité de détecter un problème sanitaire le lendemain d'un jour où un problème a été détecté est égale à $0,6$.
On note A_n, l'évènement : "un problème sanitaire a été détecté le jour n".
13.1 Quelle est la probabilité de A_n ? celle de $A_n \cap A_{n+1}$? Les évènements A_n et A_{n+1} sont-ils indépendants ?
13.2 On fait les hypothèses suivantes.

$$\mathbf{P}(A_{n+2} \mid A_{n+1} \cap A_n) = \mathbf{P}(A_{n+2} \mid A_{n+1}) \qquad (1)$$
$$\mathbf{P}(A_{n+2} \mid A_{n+1}^c \cap A_n) = \mathbf{P}(A_{n+2} \mid A_{n+1}^c) \qquad (2)$$
$$\mathbf{P}(A_{n+2} \mid A_{n+1} \cap A_n^c) = \mathbf{P}(A_{n+2} \mid A_{n+1}) \qquad (3)$$
$$\mathbf{P}(A_{n+2} \mid A_{n+1}^c \cap A_n^c) = \mathbf{P}(A_{n+2} \mid A_{n+1}^c) \qquad (4)$$

1. Démontrer que

$$\mathbf{P}_{A_{n+1}}(A_{n+2} \cap A_n) = \mathbf{P}_{A_{n+1}}(A_{n+2})\,\mathbf{P}_{A_{n+1}}(A_n).$$

Interpréter.
2. Sachant qu'un problème sanitaire a été détecté le jour n, quelle est la probabilité pour qu'un problème sanitaire soit également détecté le jour $(n+1)$ et le jour $(n+2)$?
3. Quelle est la probabilité de détecter un problème sanitaire le jour $(n+1)$ sachant qu'on n'a rien détecté le jour n ?
4. Quelle est la probabilité de détecter un problème sanitaire le jour $(n+2)$ sachant qu'on en a détecté un le jour n ?
5. Les évènements A_n et A_{n+2} sont-ils indépendants ?

14. EDHEC Eco 2003
Un joueur joue de manière compulsive. On note A_n, l'évènement "le joueur gagne la n-ième partie". On pose

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n, \qquad F_n = A_{n-1}^c \cap A_n,$$
$$G_n = A_{n-1} \cap A_n^c, \qquad H_n = A_{n-1}^c \cap A_n^c$$

et on admet que

$$\mathbf{P}(A_{n+1} \mid E_n) = 2/3 \qquad \mathbf{P}(A_{n+1} \mid F_n) = 1/2$$
$$\mathbf{P}(A_{n+1} \mid G_n) = 1/2 \qquad \mathbf{P}(A_{n+1} \mid H_n) = 1/3.$$

La famille (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'évènements et

$$\mathbf{P}(E_{n+1}) = 2/3\,\mathbf{P}(E_n) + 1/2\,\mathbf{P}(F_n),$$
$$\mathbf{P}(F_{n+1}) = 1/2\,\mathbf{P}(G_n) + 1/3\,\mathbf{P}(H_n),$$
$$\mathbf{P}(G_{n+1}) = 1/3\,\mathbf{P}(E_n) + 2/3\,\mathbf{P}(F_n),$$
$$\mathbf{P}(H_{n+1}) = 1/2\,\mathbf{P}(G_n) + 1/3\,\mathbf{P}(H_n).$$

15. Précis Degrave vol. 3
Une urne contient une boule N et une boule B.
Si on tire la boule N, on s'arrête.
Sinon, on remet la boule B dans l'urne avec une boule B supplémentaire et on recommence.
On note X, le rang d'apparition de la boule N. Alors

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(X=n) = \frac{1}{n(n+1)},$$

donc X est finie presque sûrement, mais n'est pas une variable aléatoire d'espérance finie.

III

Vecteurs aléatoires

16. Soient X et N, deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que N suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $[N=n]$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.
Alors les variables aléatoires X et $Y = N - X$ suivent respectivement les lois de Poisson $\mathscr{P}(\lambda p)$ et $\mathscr{P}(\lambda q)$.
De plus, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

17. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires de Bernoulli. On pose

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

On suppose que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$ et que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant i \leqslant n, \quad \mathbf{P}(X_{i+1} = 1 \mid S_i = k) = \frac{k+1}{i+1}.$$

17.1 Calculer la probabilité de

$$[S_n = 0] = [X_1 = \cdots = X_n = 0]$$

et celle de

$$[S_n = n] = [X_1 = \cdots = X_n = 1].$$

17.2 Démontrer que

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{n+1} + \frac{\mathbf{E}(S_n)}{n+1}.$$

17.3 Les variables aléatoires $X_2, \ldots, X_n$ suivent toutes la même loi.

17.4 Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{1-p}{n}.$$

18. Soient X et Y, deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre deux. On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\mathbf{P}(Y = aX + b) = 1.$$

Calculer le coefficient de corrélation linéaire ρ défini par

$$\rho = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

19. Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Caractériser la loi des variables aléatoires

$$U = \min\{X, Y\} \quad \text{et} \quad V = \max\{X, Y\}.$$

20. Soient $X_1, \dots, X_{2n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi géométrique $\mathcal{G}(1/2)$. On considère les deux variables aléatoires définies par

$$Y = \sum_{k=1}^{n} X_{2k} \quad \text{et} \quad Z = \exp\Big(-\sum_{k=0}^{n-1} X_{2k+1}^2\Big).$$

Démontrer que Y et Z admettent un moment d'ordre deux. Calculer $\mathbf{Cov}(Y, Z)$.

21. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose

$$S_k = X_1 + \cdots + X_k.$$

21.1 Comme

$$\forall\, 1 \leqslant k < n, \quad \mathbf{Cov}(S_k, S_{k+1}) = \mathbf{V}(S_k) > 0,$$

les variables aléatoires $S_1, \dots, S_n$ ne sont pas indépendantes.

21.2 Quels que soient les entiers $1 \leqslant k < n$ et $1 \leqslant \ell \leqslant n - k$,

$$\forall\, u, v \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(S_k = u, S_{k+\ell} = v) = \mathbf{P}(S_k = u)\,\mathbf{P}(S_\ell = v - u).$$

22. On considère des variables aléatoires indépendantes X_1, $\dots$, X_n. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on suppose que X_i suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p_i)$ avec

$$p_i = \frac{n-i+1}{n} = 1 - \frac{i+1}{n}.$$

22.1

$$\mathbf{E}(X_i) = \frac{n}{n-i+1}, \qquad \mathbf{V}(X_i) = \frac{n(i+1)}{(n-i+1)^2}.$$

22.2 La variable aléatoire

$$C_n = X_1 + \cdots + X_n$$

admet un moment d'ordre deux. De plus, $\mathbf{E}(C_n) = H_n$ (n-ième nombre harmonique) et

$$\mathbf{V}(C_n) = n(nS_n - H_n) \quad \text{où} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

23. Ulm LSH 2003
Une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ est dite **symétrique** lorsque

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X = -k).$$

23.1 Si X est symétrique, alors 0 est une médiane de X au sens où

$$\mathbf{P}(X < 0) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \mathbf{P}(X \leqslant 0).$$

23.2 Si X et Y sont indépendantes et de même loi, alors $Z = X - Y$ est symétrique.

23.3 Si X et Y sont indépendantes et symétriques, alors $Z = X + Y$ est symétrique.

24. Précis Degrave vol. 3
Soient X, et Y, deux variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Alors

$$\mathbf{P}(X = Y) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X \geqslant Y) = \frac{n+1}{2n}.$$

De plus,

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad \mathbf{P}(X - Y = k) = \frac{n-k}{n^2}$$

et, par symétrie,

$$\forall\, -n < k \leqslant -1, \quad \mathbf{P}(X - Y = k) = \frac{n+k}{n^2}.$$

25. Précis Degrave vol. 3
Soient X et Y, deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On pose

$$Z = X + Y \quad \text{et} \quad T = X - Y.$$

25.1 Si Z et T sont indépendantes, alors $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y)$.

25.2 On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $E = [\![1, 3]\!]$. Alors $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y)$ et les lois de Z et T sont décrites par le tableau suivant.

k	2	3	4	5	6
ℓ	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(Z = k), \mathbf{P}(T = \ell)$	$1/9$	$2/9$	$3/9$	$2/9$	$1/9$

Les variables aléatoires Z et T ne sont pas indépendantes.

26. Précis Degrave vol. 3
On suppose que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![1, 2n]\!]$ et que la variable aléatoire Y suit la loi uniforme sur $[\![1, X]\!]$. La probabilité

$$p_n = \mathbf{P}(Y \leqslant n, X \geqslant n, X - Y \leqslant n)$$

peut se calculer :

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{k=n}^{2n} \mathbf{P}(k - n \leqslant Y \leqslant n \mid X = k) \\ &= \frac{2n+1}{2n} \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{K+n} - \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

et tend vers

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \frac{1}{2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

27. Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes, suivant toutes les deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On considère les variables aléatoires

$$U = X + Y \quad \text{et} \quad V = X - Y.$$

27.1 Quels que soient les entiers $s \geqslant 2$ et $d \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbf{P}(U = s) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(V = d) > 0.$$

27.2 D'autre part,

$$[U = s, V = d] = \left[X = \frac{s+d}{2}, Y = \frac{s-d}{2}\right].$$

Par conséquent, si s et d n'ont pas même parité, alors cet évènement est impossible.
Les variables aléatoires U et V ne sont donc pas indépendantes.

28. Précis Degrave vol. 3
On considère deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent toutes deux la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$. On note T, la somme de ces deux variables aléatoires et on pose

$$X = T \pmod 2, \qquad Y = T \pmod 5.$$

28.1 La loi conjointe est donnée par le tableau suivant, qui donne les valeurs de $36\,\mathbf{P}(X = k, Y = \ell)$.

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$
$k = 0$	3	5	2	5	3
$k = 1$	4	2	6	2	4

En particulier, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

III.1 Modèles multivariés

29. On joue avec une pièce truquée :

$$\mathbf{P}(P) = 2/3, \qquad \mathbf{P}(F) = 1/3.$$

29.1 On lance la pièce jusqu'à ce qu'on obtienne P pour la deuxième fois. La loi du nombre X de F obtenus est donnée par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{4(n+1)}{3^{n+2}}.$$

29.2 Si on a obtenu ainsi n fois F, alors on place $(n+1)$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on tire au hasard l'une de ces boules. On note U le numéro de la boule tirée et on pose $V = X - U$.

1. Donner la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$. On en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(U = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbf{P}(X = n) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

2. Donner la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$. En déduire la loi de V.
3. Démontrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

30. Initialement, une urne contient une boule B et deux boules R. On tire avec remise et, à chaque fois, on ajoute une boule de la couleur obtenue. On note $[X_k = 1]$, le fait d'obtenir une boule R au k-ième tirage.
Donner la loi de X_1, puis la loi du couple (X_1, X_2). Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

31. On effectue $k \geqslant 2$ tirages successifs avec remise dans une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n.
On note X_i, le nombre de fois où on a tiré la boule i lors de ces k tirages.
31.1 Donner la loi de X_i.
31.2 Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
31.3 Donner la loi de $X_i + X_j$ pour $i < j$.

32. Une urne contient 3 boules B et 4 boules N. On note X_1 (resp. X_2), la couleur de la première boule tirée (resp. de la deuxième boule tirée).
32.1 On tire deux boules avec remise. Donner la loi du couple (X_1, X_2) et en déduire les lois marginales.
32.2 Mêmes questions pour deux tirages sans remise.

33. Trois boules numérotées 1, 2 et 3 sont placées aléatoirement dans trois tiroirs. On note N, le nombre aléatoire de tiroirs non vides et X_i, le nombre de boules placées dans le tiroir T_i (pour $1 \leqslant i \leqslant 3$).
33.1 Donner la loi du couple (N, X_1). En déduire les lois marginales.
33.2 Donner la loi du couple (X_1, X_3). En déduire les lois marginales.

34. ISFA 2003 (****)
On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_j = [X_1 + \cdots + X_n = j].$$

On suppose que $\mathbf{P}(A_j) > 0$ et on définit

$$\mathbf{E}_{A_j}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbf{P}(Y = k \mid A_j).$$

34.1 Si Y est une variable aléatoire d'espérance finie, alors $\mathbf{E}_{A_j}(Y)$ existe et

$$\mathbf{E}_{A_j}(Y) = \frac{\mathbf{E}(Y.\mathbb{1}_{A_j})}{\mathbf{P}(A_j)}.$$

34.2 Si Y et Z sont des variables aléatoires d'espérance finie, alors

$$\mathbf{E}_{A_j}(Y + Z) = \mathbf{E}_{A_j}(Y) + \mathbf{E}_{A_j}(Z).$$

34.3 Quel que soit $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\mathbf{E}_{A_j}(X_i) = \mathbf{E}_{A_j}(X_1).$$

On en déduit que

$$\mathbf{E}_{A_j}(X_1 + \cdots + X_n) = j$$

et donc que

$$\mathbf{E}_{A_j}(X_1) = \frac{j}{n}.$$

35. Jeu de Mémory - ESC 2003
On cherche à reconstituer n paires de cartes en retournant les cartes au hasard. On note T_n, la durée de la partie.
35.1 Quelle est la loi de T_1 ?
35.2 Pour $n \geqslant 2$, quelles sont les valeurs possibles pour T_n ?
35.3 On suppose que $n = 2$. On note C_i, l'évènement : "une nouvelle paire est reconstituée au i-ème tirage".
Pour tout $k \geqslant 2$,

$$\mathbf{P}(T_2 = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}.$$

En déduire l'espérance de T_2.
35.4 Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $k \geqslant n - 1$,

$$\mathbf{P}(T_n = k+1) = \frac{n}{\binom{2}{2n}} \mathbf{P}(T_{n-1} = k) + \left[1 - \frac{n}{\binom{2}{2n}}\right] \mathbf{P}(T_n = k).$$

On en déduit d'abord que

$$\mathbf{E}(T_n) = \mathbf{E}(T_{n-1}) + (2n - 1)$$

puis que la valeur de $\mathbf{E}(T_n)$.

36. ESC T 2003
Une urne contient une boule B et deux boules R.
36.1 On tire deux boules successivement, avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
36.2 On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à ce qu'on obtienne deux fois de suite la même couleur. On note X, le nombre de tirages effectués au cours du jeu.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. Que valent $\mathbf{P}(X = 2)$ et $\mathbf{P}(X = 3)$?

3. Pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mathbf{P}(X = 2k) = \frac{5}{8}\Big(\frac{3}{16}\Big)^{k-1}, \quad \mathbf{P}(X = 2k+1) = \Big(\frac{3}{16}\Big)^{k}.$$

4. On donne la formule suivante.

$$\forall\, x \in \,]-1, 1[\,, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Calculer $\mathbf{E}(X)$.

37. Précis Degrave vol. 3
Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On extrait n boules et on note X, le plus petit numéro tiré et Y, le plus grand numéro tiré.

37.1 Dans le cas d'un tirage *avec* remise :

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{(N-k+1)^n - (N-k)^n}{N^n},$$
$$\mathbf{P}(Y = \ell) = \frac{\ell^n - (\ell-1)^n}{N^n},$$
$$\mathbf{P}(X > k, Y \leqslant \ell) = \frac{(\ell-k)^n}{N^n}$$

pour $1 \leqslant k < \ell \leqslant N$.

37.2 Dans le cas d'un tiage *sans* remise :

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{N-k+1}{n} - \binom{N-k}{n}}{\binom{N}{n}}$$
$$\mathbf{P}(Y = \ell) = \frac{\binom{\ell}{n} - \binom{\ell-1}{n}}{\binom{N}{n}}$$
$$\mathbf{P}(X > k, Y \leqslant \ell) = \frac{\binom{\ell-k}{n}}{\binom{N}{n}}$$

pour $1 \leqslant k < \ell \leqslant N$.

37.3 Dans les deux cas, la loi du couple (X, Y) s'en déduit.

38. Précis Degrave vol. 3
Un forain fait tourner deux roues de la fortune :

— la première roue compte trois secteurs R et sept secteurs B ;
— la seconde compte un secteur V et neuf secteurs B.

38.1 La combinaison R+V apparaît dans 3% des cas et rapporte 6 euros ; si une seule roue s'arrête sur un secteur B, ce qui apparaît dans 34% des cas, le forain donne 2 euros au joueur ; enfin, si les deux roues s'arrêtent sur un secteur B, alors le forain ne donne qu'un euro au joueur.

38.2 Il faut donc fixer la mise à cinq euros au moins pour réaliser un bénéfice moyen de trois euros par partie.

39. Précis Degrave vol. 3
Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire trois simultanément, leurs valeurs sont notées X, Y et Z en supposant que

$$X \leqslant Y \leqslant Z.$$

39.1 Pour $1 \leqslant k \leqslant n-3$,

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{3(n-k-1)(n-k-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

et $\mathbf{E}(X) = (n-3)/4$.

39.2 Pour $3 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathbf{P}(Y = k) = \frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

et $\mathbf{E}(Y) = (3n+3)/4$. On peut vérifier que Y a même loi que $(n - X)$.

39.3 Pour $2 \leqslant k < n$,

$$\mathbf{P}(Z = k) = \frac{(k-1)(n-k)}{\binom{n}{3}}$$

et $\mathbf{E}(Z) = (n+1)/4$.

40. Précis Degrave vol. 3
Une urne contient b boules B et r boules R. On pose

$$p = \frac{r}{b+r}, \qquad q = \frac{b}{b+r}.$$

On effectue des tirages successifs d'une boule, avec remise, en ajoutant dans l'urne c boules de même couleur que la boule tirée. On note X_n, la variable aléatoire de Bernoulli qui prend la valeur 1 lorsqu'on tire une boule R au n-ième tirage.

40.1 La loi du couple (X_1, X_2) est donnée, au facteur $(b+r+c)$ près, par le tableau suivant.

	0	1
0	$q(b+c)$	pb
1	qr	$p(r+c)$

40.2 Les variables aléatoires X_1 et X_2 ont même loi.

40.3 La loi conditionnelle de X_1 sachant X_2 est la même que la loi conditionnelle de X_2 sachant X_1.

40.4 On pose $S = X_1 + X_2$. Alors

$$\mathbf{P}(S = 0) \propto q(b+c)$$
$$\mathbf{P}(S = 1) \propto pb + qr$$
$$\mathbf{P}(S = 2) \propto p(r+c)$$

au facteur $(b+r+c)$ près.

41. Géguand Maingueneau I.84
On considère des variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ qui suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

41.1 Pour tout $1 \leqslant k < n$, on pose $Y_k = X_k X_{k+1}$. Alors

$$\mathbf{E}(Y_k) = p^2, \quad \mathbf{V}(Y_k) = p^2(1-p^2)$$

et

$$\forall\, 1 \leqslant k < n-1, \quad \mathbf{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p^3 - p^4.$$

Que vaut $\mathbf{Cov}(Y_i, Y_{i+2})$?

41.2 On pose

$$S_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}.$$

Alors $\mathbf{E}(S_n) = p^2$ et

$$\mathbf{V}(S_n) = \frac{p^2 q}{n^2}\big(n + (3n-2)p\big).$$

42. Géguand Maingueneau I.75
Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. On pose

$$U = X + Y \quad \text{et} \quad V = X - Y.$$

42.1 Quelle est la loi du couple (U, V) ?

42.2 La covariance de U et V est nulle, donc le coefficient de corrélation linéaire $\rho_{U,V}$ est nul. Cependant les variables aléatoires U et V ne sont pas indépendantes.

43. Géguand Maingueneau I.67
On dispose de k urnes. Chaque urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule dans chaque urne et on note X_n, le plus grand numéro ainsi obtenu.

43.1 On modélise l'expérience par une famille $(Y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et on définit la variable aléatoire

$$X_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n).$$

43.2 Pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$\mathbf{P}(X_n = j) = \Big(\frac{j}{n}\Big)^k - \Big(\frac{j-1}{n}\Big)^k.$$

43.3 On en déduit que

$$\mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{n^k}\Big[\sum_{j=1}^n j^{k+1} - \sum_{j=1}^n j(j-1)^k\Big]$$

et donc que

$$\mathbf{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nk}{k+1}$$

par comparaison avec une intégrale.

44. Géguand Maingueneau I.61
Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$. On pose

$$Z = \frac{X}{Y}.$$

44.1 Soit $q \in \mathbb{Q}_+^*$. On suppose que $q = a/b$ (représentation irréductible). Alors

$$[Z = q] = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} [X = ka, Y = kb]$$

et donc

$$\mathbf{P}(Z = q) = \frac{p^2}{q^2}\cdot\frac{q^{a+b}}{1-q^{a+b}}.$$

44.2 En admettant le développement en série entière de $\ell\mathrm{n}(1+u)$,

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X).\,\mathbf{E}(1/Y) = \frac{1}{p}\cdot\frac{-p\,\ell\mathrm{n}(1-q)}{q} = \frac{-\ell\mathrm{n}\,p}{q}.$$

(À vérifier !)

45. EDHEC 2019 E - Probabilités composées
Soit $n \geqslant 3$. Une urne contient 1 boule noire; $(n-2)$ boules blanches numérotées 0 et 1 boule blanche numérotée 1.
On effectue des tirages successifs SANS remise jusqu'à l'apparition de la boule noire. On note X, le rang aléatoire d'apparition de la boule noire et B_i, le fait de voir apparaître une boule blanche au i-ème tirage.

45.1 Pour tout $2 \leqslant i < n$,

$$\mathbf{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}.$$

On en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Reconnaître la loi de X. On en déduit que

$$\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

45.2 On note Y, la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 lorsqu'on a pioché la boule blanche numérotée 1 avant de piocher la boule noire.
Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathbf{P}(X = k \cap Y = 0) = \frac{n-k}{n(n-1)}.$$

On en déduit que Y suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1/2)$.

46. BSB 2019 T - Probabilités totales
L'urne U_1 contient quatre boules rouges ; l'urne U_2 contient deux boules rouges et deux boules blanches.
On lance une pièce de monnaie normale : si on obtient Pile, alors on tire dans l'urne U_1 ; si on obtient Face, alors on tire dans l'urne U_2.
On note alors R_k, le fait d'obtenir une boule rouge au k-ième tirage.

46.1 La probabilité de l'évènement R_1 est égale à $3/4$.

46.2 On effectue deux tirages SANS remise. Alors

$$\mathbf{P}(R_1\cap R_2) = \frac{7}{12} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(\text{Pile} \mid R_1\cap R_2) = \frac{6}{7}.$$

46.3 On effectue des tirages SANS remise et on note Y, le nombre aléatoire de tirages qui permettent de savoir avec certitude dans quelle urne on tire les boules.

1. On a $Y = 1$ lorsqu'on a obtenu Face et qu'on a tiré une boule blanche dès le premier tirage.

$$\mathbf{P}(Y = 1) = 1/4$$

2. On a $Y = 2$ lorsqu'on a obtenu Face et qu'on a tiré une boule rouge, puis une boule blanche.

$$\mathbf{P}(Y = 2) = 1/6$$

3. On a $Y = 3$ lorsqu'on a obtenu Pile (et qu'on a tiré trois boules rouges !) ou lorsqu'on a obtenu Face et qu'on a tiré deux boules rouges avant de tirer une boule blanche.

$$\mathbf{P}(Y = 3) = \frac{7}{12}$$

(On retrouve le résultat de l'alinéa précédent.)

47. ESCP 2019 T - Probabilités totales
On note B_n, le fait qu'il fasse beau le jour n et M_n, le fait qu'il fasse mauvais et on pose

$$u_n = \mathbf{P}(B_n), \qquad v_n = \mathbf{P}(M_n) = 1 - u_n.$$

On suppose de plus que $u_0 = 1$ et que

$$\mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n) = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(M_{n+1} \mid M_n) = \frac{2}{5}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

47.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n.$$

La limite de u_n est égale à $3/4$.

47.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n.$$

La limite de v_n est égale à $1/4$.

47.3 Trouver une matrice K telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+1} \quad v_{n+1}) = (u_n \quad v_n)\,K.$$

Que vaut K^n ?

48. ESCP 2020 T - Système complet d'évènements
On joue à Pile ou Face. On note X, le rang aléatoire d'apparition du premier Pile et Y, le rang aléatoire d'apparition du premier Face.

48.1 Quelle est la loi de X ? celle de Y ? En déduire $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$.

48.2 Le couple

$$\big([X = 1], [Y = 1]\big)$$

est un système complet d'évènements.

48.3 La loi de $X+Y$ est portée par l'ensemble des entiers supérieurs à 3.
Les variables aléatoires $X+Y$ et $XY+1$ ont même loi car

$$[X>1] \subset [Y=1] \quad \text{et} \quad [Y>1] \subset [X=1].$$

48.4 Déterminer la loi du couple (X,Y). Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ? Calculer l'espérance de XY. En déduire que $\mathbf{V}(X+Y)=2$.

49. ESCP 2020 T - Chaîne de Markov
On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$.
On suppose d'une part que

$$\forall\, \omega\in\Omega, \qquad A_0(\omega)=1$$

et d'autre part que, pour tout entier $k\geqslant 1$ et tout entier $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(A_{n+1}=k \mid A_n=k-1)=\frac{k}{k+1},$$
$$\mathbf{P}(A_{n+1}=0 \mid A_n=k-1)=\frac{1}{k+1}.$$

On pose

$$U(\omega)=\min\{n\in\mathbb{N}^* \ :\ A_n(\omega)=\}$$

si ce minimum existe et $U(\omega)=0$ si $A_n(\omega)\neq 0$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

49.1 La fonction U est une variable aléatoire discrète.

49.2 Pour tout entier $k\geqslant 1$,

$$\mathbf{P}(U=k)=\frac{1}{k(k+1)}.$$

On en déduit que $\mathbf{P}(U=0)=0$.

50. ESSEC 2020 E

50.1 Biais par la taille dans un sondage
On suppose que le nombre X d'enfants dans une famille suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10,1/5)$ et, au sein d'une population donnée, on note M_k $(0\leqslant k\leqslant 10)$, le nombre de familles ayant k enfants ainsi que N_k $(0\leqslant k\leqslant 10)$, le nombre total d'enfants faisant partie d'une fratrie de k enfants.
Le nombre total de familles dans la population est alors

$$M=M_0+M_1+\cdots+M_{10}$$

et le nombre total d'enfants est

$$N=N_0+N_1+\cdots+N_{10}.$$

1. Que valent $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(X^2)$?
2. Pour $0\leqslant k\leqslant 10$,

$$\mathbf{P}(X=k)=\frac{M_k}{M}=\binom{10}{k}\frac{1}{5^k}\Big(\frac{4}{5}\Big)^{10-k}.$$

3. Chaque entier N_k est un multiple de k :

$$\forall\, 0\leqslant k\leqslant 10, \quad N_k=kM_k=k\,\mathbf{P}(X=k)M$$

et $N=2M$.

4. La proportion d'enfants issus d'une famille de k enfants est donc

$$p_k^*=\frac{N_k}{N}=\frac{kp_k}{2}.$$

En interrogeant au hasard des personnes et en notant Y, la taille de la fratrie de la personne interrogée,

$$\forall\, 0\leqslant k\leqslant 10, \quad \mathbf{P}(Y=k)=p_k^*$$

si bien que

$$\mathbf{E}(Y)=\frac{\mathbf{E}(X^2)}{\mathbf{E}(X)}>\mathbf{E}(X).$$

50.2 Cas des lois de Poisson
Soit $X\ :\ \Omega\to\mathbb{N}$, une variable aléatoire non identiquement nulle, d'espérance finie. La **loi de X biaisée par la taille** est la loi de la variable aléatoire X^* :

$$\forall\, k\in\mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X^*=k)=\frac{k\,\mathbf{P}(X=k)}{\mathbf{E}(X)}.$$

5. Comme $\mathbf{E}(X^*)\,\mathbf{E}(X)=\mathbf{E}(X^2)$, alors

$$\mathbf{V}(X)=\mathbf{E}(X)\cdot\big[\mathbf{E}(X^*)-\mathbf{E}(X)\big]$$

et donc $\mathbf{E}(X^*)\geqslant\mathbf{E}(X)$.

6. On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Alors la loi de X^* est la loi de $X+1$.
7. Réciproquement, on suppose que la loi de X^* est aussi la loi de $X+1$.

Démontrer que

$$\forall\, k\geqslant 1, \quad \mathbf{P}(X=k)=\frac{\mathbf{E}(X)}{k}\cdot\mathbf{P}(X=k-1).$$

En déduire que

$$\forall\, k\in\mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X=k)=\frac{\big[\mathbf{E}(X)\big]^k}{k!}\cdot\mathbf{P}(X=0)$$

puis que X suit une loi de Poisson.

51. BSB 2020 T

51.1 On pose

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}.$$

Diagonaliser la matrice A, puis la matrice B. En déduire que

$$B^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n-1&3^n-1\\3^n-1&3^n-1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\big(3^nA+(2I-A)\big).$$

51.2 Les joueurs J_1 et J_2 s'affrontent au badminton :

— Le joueur J_1 sert en premier ;
— Le joueur qui sert lors du $(n+1)$-ième échange est celui qui a remporté le n-ième échange ;
— La probabilité que le joueur qui sert remporte l'échange est égale à $2/3$.

On note a_n (resp. b_n), la probabilité que J_1 (resp. J_2) remporte le n-ième échange.

1. Démontrer que $a_1=2/3$, $b_1=1/3$, $a_2=5/9$ et plus généralement que

$$\forall\, n\geqslant 1, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2/3a_n + 1/3b_n \\ b_{n+1} = 1/3a_n + 2/3b_n. \end{cases}$$

2. En déduire que

$$\forall\, n\geqslant 1, \quad \begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$$

et donc que

$$\forall\, n\geqslant 1, \quad a_n=\frac{3^n+1}{2.3^n}, \quad b_n=1-a_n.$$