

Composition de Mathématiques

Le 8 novembre 2023 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

**Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.**

❖ I – Problème ❖

1. Justifier l'existence de l'intégrale suivante.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx$$

2. Justifier l'existence des intégrales suivantes et calculer leur valeur.

2. a.

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$$

2. b.

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

2. c.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)x^2}$$

❖ II – Problème ❖

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On étudie l'endomorphisme f représenté dans la base canonique de E par la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et on pose $u = (2, -1, -1)$.

- Démontrer que l'endomorphisme f est auto-adjoint.
- Démontrer que la droite vectorielle $D = \mathbb{R} \cdot u$ est stable par f .
- Donner une équation cartésienne du sous-espace vectoriel $P = D^\perp$. Démontrer que P est stable par f .
- Vérifier que le vecteur $v = (0, 1, -1)$ appartient au sous-espace P .
- Déterminer un vecteur w tel que (v, w) soit une base orthogonale du sous-espace P .
- Calculer $f(v)$ et $f(w)$.

7. Déterminer une base orthonormée \mathcal{B} de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Diag}(1, 3, 4).$$

8. Soit π , la projection orthogonale sur P . Calculer la matrice de π relative à la base canonique. Quelle est la matrice de π relative à la base \mathcal{B} déterminée au [7.]?

❖ III – Problème ❖

Partie A. Structure euclidienne

☛ L'espace $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels est muni du produit scalaire défini par

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P | Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t) dt.$$

La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|\cdot\|$.

☛ On note \mathcal{B}_0 , la base canonique de E :

$$\mathcal{B}_0 = (X^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

et $\mathcal{B} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la base orthonormée de E qui se déduit de la base canonique \mathcal{B}_0 par l'algorithme de Gram-Schmidt.

☛ On rappelle en particulier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{Vect}(1, \dots, X^n) = \text{Vect}(U_0, \dots, U_n) \quad (1)$$

et que le coefficient dominant de chaque polynôme U_n est strictement positif.

1. Soient P et Q , deux polynômes tels que

$$\forall t \in [0, \pi], \quad P(\cos t) = Q(\cos t).$$

Démontrer que $P = Q$.

2. Démontrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur l'espace vectoriel E .

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré du polynôme U_n est égal à n .

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$W_n = \|X^n\|^2.$$

4.a. Démontrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive.

4.b. Au moyen d'une intégration par parties, démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2n + 2)W_{n+1} = (2n + 1)W_n.$$

En déduire que

$$\ln \frac{W_{n+1}}{W_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{2n},$$

puis un équivalent de $\ln W_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4.c. Que peut-on en déduire sur le comportement asymptotique de la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$?

|| On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5. La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle vers le polynôme nul ?

6. Calculer $\|U_p - U_n\|$ en fonction des entiers n et p . (On se restreindra au cas $n \neq p$.)

7. On suppose qu'il existe une suite extraite $(U_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un polynôme $Q_0 \in E$.

Démontrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|U_{n_{k+1}} - U_{n_k}\| = 0$$

et conclure.

Partie B. Les polynômes de Tchebychev

8. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, polynôme $T_n \in E$ tel que

$$\forall t \in [0, \pi], \quad T_n(\cos t) = \cos nt.$$

☞ On établira en particulier la relation suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n. \quad (2)$$

|| La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constitue la famille des **polynômes de Tchebychev** (de première espèce). La relation (2) permet de calculer facilement ces polynômes :

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 & T_1 &= X \\ T_2 &= 2X^2 - 1 & T_3 &= 4X^3 - 3X \dots \end{aligned}$$

9. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(-X) = (-1)^n T_n.$$

10. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg T_n = n$$

en précisant le coefficient dominant de T_n .

11. Quels que soient les entiers $n \geq 1$ et $0 \leq k < n$, on pose

$$x_{k,n} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

11.a. Vérifier que

$$\forall 0 \leq k < n, \quad x_{k,n+1} > x_{k,n} > x_{k+1,n+1}.$$

11.b. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_{k,n}).$$

12. Démontrer que les polynômes de Tchebychev T_n sont deux à deux orthogonaux (pour la structure euclidienne définie sur $\mathbb{R}[X]$ au début de l'énoncé).

13.a. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = \sum_{k=0}^n \langle U_k | T_n \rangle \cdot U_k.$$

13.b. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \frac{T_n}{\|T_n\|}.$$

Partie C. Une forme linéaire

|| Dans cette partie, on étudie la forme linéaire définie sur E par

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = \int_0^{\pi/2} P(\cos t) dt.$$

On introduit à cet effet la constante

$$K = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)^2 \pi}.$$

14. Démontrer que la constante K est bien définie.

15. Soit $n \in \mathbb{N}$.

15.a. Calculer $\varphi(T_n)$ en discutant sur la parité de n .

15.b. En déduire $\varphi(U_n)$.

16. Soit $P \in E$.

16.a. Démontrer qu'il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$P = \sum_{n=0}^d \langle U_n | P \rangle \cdot U_n.$$

Un tel entier d est-il unique ?

16.b. Démontrer que

$$|\varphi(P)|^2 \leq \left[\sum_{k=0}^d \varphi(U_k)^2 \right] \cdot \|P\|^2.$$

17. Démontrer que la forme linéaire φ est continue et que sa norme subordonnée est inférieure à \sqrt{K} .

18. Expliciter une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\varphi(P_n)|}{\|P_n\|} = \sqrt{K}.$$

19. Démontrer que

$$\sup_{\|P\|=1} |\varphi(P)| = \sqrt{K}$$

et que cette borne supérieure n'est pas un maximum.

Solution I ✿ Quelques intégrales

1. La fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{1+x^2}$$

est clairement continue sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$. De plus,

$$f(x) = \cos 2x \cdot \frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Par conséquent, la fonction f est intégrable sur I et l'intégrale généralisée existe bien.

2. a. La fonction $\varphi = [x \mapsto x^2]$ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 de l'intervalle I sur I lui-même et

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot (2x)e^{-x^2} = \frac{1}{2} \cdot e^{-\varphi(x)} |\varphi'(x)|.$$

On sait que la fonction g définie par

$$\forall t \in I, \quad g(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-t}$$

est intégrable sur I (fonction de référence). D'après le Théorème de changement de variable, la fonction f est intégrable sur I (ce qui prouve que l'intégrale généralisée existe bien) et

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} g(t) dt = \frac{1}{2}.$$

2. b. La fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

est continue sur le segment $[1, e]$, donc l'intégrale existe bien (et ce n'est pas une intégrale généralisée).

✿ La fonction $\varphi = [x \mapsto \ln x]$ est de classe \mathcal{C}^1 et

$$\forall x \in [1, e], \quad f(x) = (\varphi(x))^2 \cdot \varphi'(x)$$

donc, d'après la Formule du changement de variable,

$$\int_1^e f(x) dx = \int_{\varphi(1)}^{\varphi(e)} t^2 dt = \frac{1}{3}$$

puisque $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(e) = 1$.

2. c. La fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)x^2}$$

est clairement continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3},$$

donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, l'intégrale généralisée existe bien.

✿ D'après le Théorème de décomposition en éléments simples, il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \geq 1, \quad f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}.$$

D'après l'expression de f ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

et d'après la décomposition en éléments simples,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{c}{x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Par unicité de l'équivalent, on en déduit que $c = 1$.

De même,

$$f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow -1}{=} \frac{a}{x+1} + \mathcal{O}(1),$$

donc $a = 1$.

Enfin,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3} \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{a+b}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc $a + b = 0$ et $b = -1$.

Ainsi,

$$\forall x \geq 1, \quad f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

✿ On en déduit que, pour tout $A \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^A f(x) dx &= \left[\ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^A \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{A}\right) - \frac{1}{A} - \ln 2 + 1. \end{aligned}$$

Par définition de l'intégrale généralisée,

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A f(x) dx = 1 - \ln 2.$$

Solution II ✿ Réduction d'une matrice symétrique

1. Par définition de la structure euclidienne canonique de \mathbb{R}^3 , la base canonique est une base orthonormée. La matrice de f relative à la base canonique est une matrice symétrique, donc l'endomorphisme f est auto-adjoint.

2. Comme

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

on a $f(u) = u \in D$ et comme le vecteur u engendre le sous-espace D , on en déduit que la droite vectorielle D est stable par f .

|| On a en fait démontré que le vecteur u était un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

3. Comme $\dim E = 3$ et que $\dim D = 1$, alors :

$$\dim P = \dim E - \dim D = 3 - 1 = 2$$

donc $P = D^\perp$ est un plan.

Comme $D = \mathbb{R} \cdot u$ avec $u = (2, -1, -1)$ et que la base canonique est une base orthonormée, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{OM} = (x, y, z) \in P &\iff \langle \mathbf{OM} | u \rangle = 0 \\ &\iff 2x - y - z = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan P est donc

$$2x - y - z = 0.$$

On sait que f est un endomorphisme auto-adjoint [1.] et que le sous-espace D est stable par f [2.], donc le sous-espace $P = D^\perp$ est stable par $f^* = f$.

4. Il est clair que v vérifie l'équation cartésienne de P trouvée en [3.], donc $v \in P$.

5. On cherche ici un vecteur $w = (x, y, z)$ qui appartient à P :

$$2x - y - z = 0$$

et qui soit orthogonal au vecteur v (pour le produit scalaire canonique) :

$$0 \cdot x + 1 \cdot y + (-1) \cdot z = y - z = 0.$$

Le vecteur $w = (1, 1, 1)$ convient.

Le couple (v, w) est une famille orthogonale de deux vecteurs non nuls de P et comme $\dim P = 2$, ce couple est une base orthogonale de P .

Le Théorème de la base incomplète prouve l'existence d'un tel vecteur w mais ne nous dit pas comment calculer explicitement un tel vecteur !

Comme $\dim P = 2$, tous les vecteurs de P orthogonaux au vecteur v sont proportionnels. En quelque sorte, notre vecteur w est le seul possible.

6. Comme au [2.], on trouve que

$$f(v) = 3 \cdot v \quad \text{et} \quad f(w) = 4 \cdot w.$$

7. Comme (u) est une base orthogonale de D et que (v, w) est une base orthogonale de $P = D^\perp$, alors (u, v, w) est une base orthogonale de $E = D \oplus P$.

D'après [2.] et [6.],

$$\mathcal{M}_{(u,v,w)}(f) = \text{Diag}(1, 3, 4).$$

La famille

$$\mathcal{B} = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot u, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v, \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot w \right)$$

est donc une base orthonormée de E et comme on s'est contenté de normaliser les vecteurs de la base précédente, la matrice n'a pas changé :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Diag}(1, 3, 4).$$

8. Le couple (v, w) est une base orthogonale de P [5.]. Notons V et W , les colonnes qui représentent ces deux vecteurs dans la base canonique.

Comme la base canonique est une base orthonormée, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{can}}(\pi) &= \frac{V \cdot V^\top}{V^\top \cdot V} + \frac{W \cdot W^\top}{W^\top \cdot W} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le premier vecteur de la base \mathcal{B} appartient au sous-espace $D = P^\perp = \text{Ker } \pi$; les deux derniers vecteurs de \mathcal{B} appartiennent au sous-espace $P = \text{Im } \pi$ et comme π est une projection,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution III * Polynômes de Tchebychev

Partie A. Structure euclidienne

1. L'application $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est surjective, donc

$$\forall x \in [-1, 1], \quad P(x) = Q(x),$$

ce qui prouve que le polynôme $(P - Q)$ admet une infinité de racines et donc que $P = Q$.

2. Quels que soient les polynômes P et Q , la fonction

$$[t \mapsto P(\cos t)Q(\cos t)]$$

est continue sur le segment $[0, \pi]$, donc l'intégrale $\langle P | Q \rangle$ est bien définie.

Il est alors clair que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire et symétrique.

Pour tout polynôme P , la fonction $[t \mapsto P(\cos t)^2]$ est positive, donc l'intégrale $\langle P | P \rangle$ est positive (les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant).

Et comme cette fonction est continue sur $[0, \pi]$, si l'intégrale $\langle P | P \rangle$ est nulle, alors

$$\forall t \in [0, \pi], \quad P(\cos t)^2 = 0.$$

D'après [1.], le polynôme P^2 est le polynôme nul, donc $P = 0$ et $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc définie positive.

L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E .

3. Comme $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de E , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \neq 0$$

et en particulier $\deg U_n \geq 0$.

D'après (1),

$$U_n \in \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$$

donc $\deg U_n \leq n$.

Si $n = 0$, alors on a démontré que $\deg U_n = 0$.

• D'autre part, si $n \geq 1$, alors la famille $(U_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre, donc

$$U_n \notin \text{Vect}(U_0, \dots, U_{n-1}) \stackrel{(1)}{=} \text{Vect}(1, X, \dots, X^{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

et par conséquent $\deg U_n > n - 1$. Comme $\deg U_n$ et $(n - 1)$ sont des entiers, on en déduit que $\deg U_n \geq n$.

• Finalement, $\deg U_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. a. Comme $X^n \neq 0$, alors $\|X^n\| \neq 0$ (la norme sépare les points) et donc

$$W_n = \|X^n\|^2 > 0.$$

4. b. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \int_0^\pi \cos^{2n+2} t \, dt \\ &= \int_0^\pi \cos^{2n} t (1 - \sin^2 t) \, dt \\ &= W_n + \int_0^\pi \cos^{2n} t (-\sin t) \cdot \sin t \, dt \\ &= W_n + \left[\frac{\cos^{2n+1} t}{2n+1} \cdot \sin t \right]_0^\pi \\ &\quad - \int_0^\pi \frac{\cos^{2n+1} t}{2n+1} \cdot \cos t \, dt \\ &= W_n - \frac{1}{2n+1} W_{n+1} \quad (\text{car } \sin 0 = \sin \pi = 0) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n.$$

|| On doit avoir reconnu une variante des intégrales de Wallis !

• Comme $W_n > 0$ [4.a.],

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n+2} > 0.$$

En composant par \ln , on en déduit que

$$\ln \frac{W_{n+1}}{W_n} = \ln \left(1 - \frac{1}{2n+2} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

• On a démontré que

$$\ln W_n - \ln W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2(n+1)}.$$

Or la série harmonique $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif, donc la série télescopique

$$\sum (\ln W_k - \ln W_{k+1})$$

est divergente et on connaît un équivalent de ses sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\ln W_k - \ln W_{k+1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

donc (résultat bien connu sur la série harmonique)

$$\ln W_0 - \ln W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln n.$$

Comme $\ln W_0$ est une constante et que $\ln n$ tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\ln W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\ln n}{2}.$$

4. c. On sait que \exp tend vers 0 au voisinage de $-\infty$. Par composition de limites, on déduit de ce qui précède que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|X^n - 0\|^2 = 0.$$

Autrement dit : la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers le polynôme nul lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Par hypothèse,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|U_n - 0\| = \|U_n\| = 1,$$

donc la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers le polynôme nul.

6. Par hypothèse, la famille $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormée. On en déduit que, pour $n \neq p$,

$$\begin{aligned} \|U_p - U_n\|^2 &= \|U_p\|^2 + \|U_n\|^2 - 2 \langle U_p | U_n \rangle \\ &= 1 + 1 - 2 \times 0 = 2. \end{aligned}$$

7. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire,

$$0 \leq \|U_{n_{k+1}} - U_{n_k}\| \leq \|U_{n_{k+1}} - Q_0\| + \|Q_0 - U_{n_k}\|.$$

Par hypothèse,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Q_0 - U_{n_k}\| = 0$$

et par composition de limites,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Q_0 - U_{n_{k+1}}\| = 0,$$

donc, par encadrement,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|U_{n_{k+1}} - U_{n_k}\| = 0. \quad (*)$$

• Comme $(U_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad n_k < n_{k+1}$$

donc, d'après [6.],

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|U_{n_{k+1}} - U_{n_k}\| = \sqrt{2},$$

ce qui contredit (*). On a ainsi démontré par l'absurde que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admettait pas de suite extraite convergente.

|| Cette suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donne un contre-exemple au Théorème de Bolzano-Weierstrass : la suite est bornée (tous les termes sont des vecteurs unitaires) mais elle n'a pas de valeur d'adhérence. Cela s'explique par le fait que l'espace E est un espace vectoriel de dimension infinie.

Partie B. Les polynômes de Tchebychev

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. S'il existe deux polynômes P et Q tels que

$$\forall t \in [0, \pi], \quad P(\cos t) = \cos nt = Q(\cos t),$$

alors [1.] $P = Q$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc *au plus un* polynôme T_n .

• Avec $T_0 = 1$ et $T_1 = X$, on a bien

$$\forall t \in [0, \pi], \quad \begin{cases} T_0(\cos t) = \cos 0t = 1 \\ T_1(\cos t) = \cos 1t = \cos t. \end{cases}$$

Supposons maintenant qu'il existe un entier $n \geq 1$ et des polynômes T_n et T_{n-1} tels que

$$\forall t \in [0, \pi], \quad \begin{cases} T_{n-1}(\cos t) = \cos(n-1)t \\ T_n(\cos t) = \cos nt. \end{cases}$$

Alors, pour tout $t \in [0, \pi]$,

$$\cos(n+1)t + \cos(n-1)t = 2 \cos t \cos nt$$

donc

$$\cos(n+1)t = 2 \cos t \cdot T_n(\cos t) - T_{n-1}(\cos t).$$

En posant

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1},$$

on obtient donc un polynôme T_{n+1} tel que

$$\forall t \in [0, \pi], \quad T_{n+1}(\cos t) = \cos(n+1)t.$$

On a ainsi démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existait *au moins un* polynôme T_n .

• Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, polynôme T_n . On en déduit que la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

est vraie : elle indiquait plus haut *un choix possible* pour T_{n+1} , mais l'unicité de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prouve qu'il s'agit du *seul choix possible*.

9.

|| Nous allons procéder par récurrence sur deux indices, la relation (2) ne nous laisse pas le choix !

On a bien

$$T_0(-X) = 1 = (-1)^0 T_0 \quad \text{et} \quad T_1(-X) = -X = (-1)^1 T_1.$$

Supposons maintenant qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que

$$T_n(-X) = (-1)^n T_n \quad \text{et} \quad T_{n-1}(-X) = (-1)^{n \pm 1} T_{n-1}.$$

|| Les entiers $n-1$ et $n+1$ ont même parité!

D'après (2),

$$\begin{aligned} T_{n+1}(-X) &= -2XT_n(-X) - T_{n-1}(-X) \\ &= (-1)^{n+1} [2XT_n - T_{n-1}] \quad \text{(HR)} \\ &= (-1)^{n+1} T_{n+1}. \end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(-X) = (-1)^n T_n.$$

10.

|| Nous procédons à nouveau par récurrence sur deux indices.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note c_n , le coefficient dominant de T_n .

• On a déjà vu que $\deg T_0 = 0$ et $\deg T_1 = 1$.

Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\deg T_n = n \quad \text{et} \quad \deg T_{n-1} = n-1.$$

Alors il existe un polynôme $U_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$T_n = c_n X^n + U_n$$

et d'après (2),

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 2XT_n - T_{n-1} \\ &= 2c_n X^{n+1} + (2XU_n - T_{n-1}). \end{aligned}$$

Or $\deg T_{n-1} = n-1$ (hypothèse de récurrence) et, par construction,

$$\deg(XU_n) = 1 + \deg U_n \leq 1 + (n-1) = n,$$

donc

$$\deg(2XU_n - T_{n-1}) \leq n.$$

On en déduit que $\deg T_{n+1} = n+1$ (ce qui achève la récurrence) et aussi que

$$\forall n \geq 1, \quad c_{n+1} = 2c_n.$$

Par conséquent, comme $c_1 = 1 = 2^{1-1}$,

$$\forall n \geq 1, \quad c_n = 2^{n-1}.$$

|| Attention! Comme $c_0 = 1$, l'expression de c_n pour $n \geq 1$ n'est pas valable pour $n = 0$.

11. a. Pour $0 \leq k < n$, on a en fait

$$0 \leq k \leq n-1$$

(inégalité stricte entre nombres entiers) et donc

$$1 \leq 2k+1 \leq 2n-1 < 2n.$$

On a aussi $2k+3 < 2(n+1)$ et comme

$$\begin{aligned} (2k+1)(n+1) &= 2kn + 2k + 1 + n \\ &< 2kn + 3n = (2k+3)n, \end{aligned}$$

alors

$$0 < \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} < \frac{(2k+1)\pi}{2n} < \frac{(2k+3)\pi}{2(n+1)} < \pi.$$

Sur le segment $[0, \pi]$, la fonction \cos est strictement décroissante, donc

$$-1 < x_{k+1, n+1} < x_{k, n} < x_{k, n+1} < 1.$$

|| En particulier, pour tout entier $n \geq 2$, les réels

$$x_{0, n}, x_{1, n}, \dots, x_{n-1, n}$$

|| sont deux à deux distincts.

11. b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout entier $0 \leq k < n$, par définition du polynôme T_n ,

$$\begin{aligned} T_n(x_{k,n}) &= T_n\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \\ &= \cos\frac{(2k+1)n\pi}{2n} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0. \end{aligned}$$

Chaque $x_{k,n}$ est donc une racine de T_n . Or les $x_{k,n}$ sont deux à deux distincts [11.a.], donc nous connaissons n racines distinctes de T_n . Mais $\deg T_n = n$ [10.], donc le polynôme T_n est scindé à racines simples.

De plus, le coefficient dominant de T_n est égal à 2^{n-1} [10.], donc

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_{k,n}).$$

Évidemment, cette propriété est fautive pour $n = 0$! (Pas à cause du produit, qui est alors égal à 1 par convention, mais à cause du coefficient dominant.)

12. Par définition du produit scalaire, quels que soient les entiers $0 \leq n < p$,

$$\begin{aligned} \langle T_n | T_p \rangle &= \int_0^\pi T_n(\cos t) T_p(\cos t) dt \\ &= \int_0^\pi \cos nt \cos pt dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(n+p)t + \cos(n-p)t dt. \end{aligned}$$

Or $n+p \geq p > 0$ et $n-p \neq 0$, donc

$$\begin{aligned} \langle T_n | T_p \rangle &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+p)t}{n+p} + \frac{\sin(n-p)t}{n-p} \right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc les polynômes de Tchebychev sont deux à deux orthogonaux.

13. a. D'après [10.],

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n \in \mathbb{R}_n[X]$$

et par (1), la famille $(U_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une **base orthonormée** de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit directement que

$$T_n = \sum_{k=0}^n \langle U_k | T_n \rangle \cdot U_k.$$

13. b. D'après [3.],

$$\forall 0 \leq k < n, \quad U_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

D'après [10.], les polynômes de Tchebychev sont échelonnés en degré :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \deg T_k = k.$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Vect}(T_0, \dots, T_{n-1})$$

et donc que

$$\forall 0 \leq k < n, \quad U_k \in \text{Vect}(T_0, \dots, T_{n-1}).$$

Par orthogonalité [12.],

$$\forall 0 \leq k < n, \quad \langle U_k | T_n \rangle = 0.$$

On peut alors déduire de [13.a.] que

$$T_n = \langle U_n | T_n \rangle \cdot U_n.$$

Par homogénéité de la norme, on en déduit que

$$\|T_n\| = |\langle U_n | T_n \rangle| \|U_n\| = |\langle U_n | T_n \rangle|.$$

Comme $T_n \neq 0$, alors $\|T_n\| > 0$ et donc

$$U_n = \frac{T_n}{\langle U_n | T_n \rangle} = \pm \frac{T_n}{\|T_n\|}.$$

Or le coefficient dominant de T_n est strictement positif [10.] et le coefficient dominant de U_n est strictement positif lui aussi [rappels de cours]. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \frac{T_n}{\|T_n\|}.$$

Partie C. Une forme linéaire

14. Comme la série de Riemann $\sum 1/k^2$ est absolument convergente et que

$$\frac{2}{(2k+1)^2\pi} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\pi \cdot k^2},$$

la série qui définit la constante K est absolument convergente et donc convergente.

Par conséquent, K est bien définie.

15. a. Pour $n = 0$,

$$\varphi(T_0) = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Par tout entier $n \geq 1$, par définition de T_n ,

$$\varphi(T_n) = \int_0^{\pi/2} \cos nt dt = \left[\frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi/2}.$$

Si n est pair, alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k$ et

$$\varphi(T_n) = \frac{\sin k\pi}{n} = 0.$$

Si n est impair, alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ et

$$\varphi(T_n) = \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Bilan : $\varphi(T_0) = \pi/2$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(T_{2k}) = 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi(T_{2k+1}) = \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

15. b. Comme $T_n = \|T_n\| \cdot U_n$ par [13.b.] et que φ est linéaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(U_n) = \frac{1}{\|T_n\|} \cdot \varphi(T_n).$$

On a déjà calculé $\varphi(T_n)$ en [15.a].

• Pour $n = 0$:

$$\|T_0\|^2 = \int_0^\pi dt = \pi, \quad \text{donc} \quad \varphi(U_0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|T_n\|^2 = \int_0^\pi \cos^2 nt \, dt = \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2nt}{2} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

• Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi(U_{2k}) = 0.$$

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(U_{2k+1}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

16. a.

|| C'est presque la même question que [13.a].

Tout polynôme $P \in E$ possède un degré et il existe donc un entier d supérieur ou égal à $\deg P$. Dans ce cas,

$$P \in \mathbb{R}_d[X]$$

et comme $(U_n)_{0 \leq n \leq d}$ est une **base orthonormée** de $\mathbb{R}_d[X]$ par (1), on peut décomposer $P \in \mathbb{R}_d[X]$ dans cette BON :

$$P = \sum_{n=0}^d \langle U_n | P \rangle \cdot U_n.$$

• N'importe quel entier d supérieur ou égal à $\deg P$ convient, il n'y a donc pas unicité de l'entier d .

16. b. Par linéarité de φ , on déduit de la décomposition de P que

$$\varphi(P) = \sum_{n=0}^d \langle U_n | P \rangle \cdot \varphi(U_n).$$

D'après l'inégalité de Schwarz (dans \mathbb{R}^{d+1} muni de sa structure euclidienne canonique),

$$|\varphi(P)|^2 \leq \left[\sum_{n=0}^d \langle U_n | P \rangle^2 \right] \left[\sum_{n=0}^d \varphi(U_n)^2 \right].$$

En [16.a], on a décomposé P dans une **base orthonormée**. D'après le Théorème de Pythagore,

$$\|P\|^2 = \sum_{n=0}^d \langle U_n | P \rangle^2.$$

Par conséquent,

$$|\varphi(P)|^2 \leq \left[\sum_{n=0}^d \varphi(U_n)^2 \right] \cdot \|P\|^2$$

cet encadrement étant vrai pour tout entier $d \geq \deg P$.

17. D'après [14.] et [15.b.], la série $\sum \varphi(U_n)^2$ est (absolument) convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(U_n)^2 = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)^2\pi} = K.$$

Les sommes partielles d'une série convergente de *terme général positif* sont majorées par la somme de cette série. On peut donc déduire de l'encadrement précédent que

$$\forall P \in E, \quad |\varphi(P)| \leq \sqrt{K} \|P\|.$$

Cet encadrement prouve que la forme linéaire φ est continue et que sa norme subordonnée est inférieure à \sqrt{K} .

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n = \sum_{k=0}^n \varphi(U_k) \cdot U_k.$$

On a alors, par linéarité de φ ,

$$\varphi(P_n) = \sum_{k=0}^n \varphi(U_k)^2 \quad \text{et} \quad \|P_n\|^2 = \sum_{k=0}^n \varphi(U_k)^2$$

par Pythagore (on a décomposé P_n dans une famille **orthonormée**). Par conséquent,

$$\varphi(P_n)^2 = \left[\sum_{k=0}^n \varphi(U_k)^2 \right] \cdot \|P_n\|^2$$

et on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\varphi(P_n)|}{\|P_n\|} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(U_k)^2 \right)^{1/2} = \sqrt{K}.$$

La connaissance du cours permet de trouver la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sans trop réfléchir. En effet, dans \mathbb{R}^{d+1} muni de sa structure euclidienne canonique, on sait que

$$\left[\sum_{k=0}^d a_k b_k \right]^2 \leq \sum_{k=0}^d a_k^2 \sum_{k=0}^d b_k^2$$

avec égalité si, et seulement si, les vecteurs

$$(a_0, a_1, \dots, a_d) \quad \text{et} \quad (b_0, b_1, \dots, b_d)$$

sont proportionnels (cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz). Ici, on s'est contenté de choisir

$$(a_0, a_1, \dots, a_d) = (b_0, b_1, \dots, b_d).$$

19. D'après [17.], pour tout polynôme $P \in E$ dont la norme est égale à 1,

$$|\varphi(P)| \leq \sqrt{K}.$$

Le majorant étant indépendant de P , on peut passer au sup :

$$\sup_{\|P\|=1} |\varphi(P)| \leq \sqrt{K}.$$

• Les polynômes P_n choisis en [18.] sont tous distincts du polynôme nul et les polynômes $Q_n = P_n / \|P_n\|$ sont donc des vecteurs unitaires. Par linéarité de φ ,

$$\frac{|\varphi(P_n)|}{\|P_n\|} = |\varphi(Q_n)|.$$

La borne supérieure étant un majorant, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\varphi(Q_n)| \leq \sup_{\|P\|=1} |\varphi(P)|.$$

D'après [18.], on peut passer à la limite et comme l'inégalité large est conservée par passage à la limite, on en déduit enfin que

$$\sqrt{K} = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi(Q_n)| \leq \sup_{\|P\|=1} |\varphi(P)|.$$

• Par double inégalité, nous avons démontré que

$$\sup_{\|P\|=1} |\varphi(P)| = \sqrt{K}.$$

• Dans la somme qui définit la constante K , il y a une infinité de termes strictement positifs ("famille de support infini"). Par conséquent,

$$\forall d \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^d \varphi(U_k)^2 < \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(U_k)^2 = K.$$

En appliquant l'encadrement du [16.b.] à un polynôme P de norme 1 et pour tout $d \geq \deg P$,

$$|\varphi(P)| \leq \left[\sum_{k=0}^d \varphi(U_k)^2 \right]^{1/2} < \sqrt{K}.$$

Autrement dit, la borne supérieure de l'expression $|\varphi(P)|$ sur la sphère unité de E n'est pas atteinte, ce n'est pas un maximum.

|| Dans un espace vectoriel **de dimension finie**, la sphère unité est compacte, donc toute forme linéaire sur cet espace atteint donc un maximum sur la sphère unité.

|| Comme on l'a démontré en [7.], dans l'espace E , la sphère unité n'est pas compacte et une forme linéaire continue telle que φ n'atteint donc pas nécessairement un maximum sur la sphère unité.