Composition de Mathématiques

Le 29 novembre 2023 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des ***nombres de Bernoulli*** *est définie par la donnée de*

$$b_0 = 1$$

et la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad b_n = \frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k} b_k.$$

Certains de ces nombres apparaissent dans la relation d'Euler (qu'on admettra) :

$$\zeta(2k) \overset{déf.}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}\, b_{2k}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que les nombres de Bernoulli sont des rationnels.
2. Que vaut b_2 ?
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quel est le signe de b_{2k} ?

On va s'attacher à calculer numériquement les nombres de Bernoulli. Pour cela, on suppose connue une fonction `f(n)` *qui renvoie la factorielle de l'entier $n \in \mathbb{N}$.*
On admet *que l'exécution de* `f(n)` *effectue $(n-1)$ multiplications.*

4. On considère la fonction `binom(n,p)` codée comme suit.

```
def binom(n,p):
  if (p<0) or (p>n):
    return 0
  else:
    return f(n)//(f(p)*f(n-p))
```

4. a. Combien de multiplications l'exécution de l'instruction `binom(30, 10)` effectue-t-elle ? Expliquer comment on pourrait réduire ce nombre.
4. b. Que se passerait-il si on remplaçait la dernière ligne du code par la ligne suivante ?

```
    return f(n)/(f(p)*f(n-p))
```

5. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant p \geqslant 1, \quad \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

En déduire une fonction <u>récursive</u> `binom_rec(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.
6. Écrire une fonction (non récursive) `bernoulli(n)` qui renvoie une valeur numérique approchée du nombre de Bernoulli b_n.

❖ II – Problème ❖

Partie A.

Dans cette partie, on étudie la fonction H définie par

$$H(x) = \int_0^x e^{it^2}\, dt.$$

1. Démontrer que H est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $H'(x)$.
2. Étudier la parité de H.
3. Pour $x > 0$, démontrer que

$$H(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\, du.$$

4. En déduire que, pour tout $x > \sqrt{2\pi}$,

$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = \frac{-ie^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2}\frac{e^{iu}}{u\sqrt{u}}\, du.$$

5. En déduire que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}\, dt$$

est convergente. La fonction $h = [t \mapsto e^{it^2}]$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?
6. Coder en langage Python une fonction `I(f,a,b,n)` dont les arguments sont :

— une fonction `f` à valeurs réelles ou complexes ;
— deux réels a et b ;
— et un entier naturel $n \geqslant 1$

et qui renvoie une valeur approchée par la méthode des rectangles de l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\,dt,$$

calculée avec n rectangles.

7. Coder en langage Python une fonction `H(x,n)` dont les arguments sont un réel x et un entier $n \geqslant 1$, et qui renvoie une valeur approchée de $H(x)$ calculée au moyen de la fonction Python précédente.

☞ *On admet que le module* `math` *a déjà été chargé avec l'instruction suivante :*

```
import math
```

et on rappelle que l'expression e^{it^2} *est codée en Python par* `exp(1j*t**2)`.

Partie B.

Dans cette partie, on étudie la fonction g *définie par*

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\,dt.$$

À cet effet, on considère également la fonction f *définie par*

$$f(x,t) = \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}.$$

8. Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Calculer le module de $e^{-x^2(t^2-i)}$ et celui de (t^2-i).

9. Démontrer que la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

10. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle qui tend vers $+\infty$. À l'aide du Théorème de convergence dominée, démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = 0.$$

En déduire la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

11. Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

12. On *admet* que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

converge et qu'elle est égale à $\sqrt{\pi}$.

Démontrer que

$$\forall\, x > 0, \quad g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}.$$

13. a. Décomposer la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{X^2-i}$$

en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

13. b. En déduire qu'il existe quatre nombres complexes a, b, c et d, **qu'on ne cherchera pas à calculer**, tels que

$$F = a\cdot\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1} + \frac{b}{X^2-X\sqrt{2}+1} + c\cdot\frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{d}{X^2+X\sqrt{2}+1}.$$

13. c. Démontrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1} = \pi\sqrt{2}$$

et calculer la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1}.$$

13. d. En admettant que

$$a = -c = \frac{1-i}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad b = d = \frac{(1-i)i}{4},$$

en déduire la valeur de $g(0)$.

14. Démontrer que

$$\forall\, x > 0, \quad g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi}H(x).$$

☞ *La fonction* H *a été définie et étudiée dans la première partie.*

En déduire les valeurs des intégrales suivantes.

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt \qquad \int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,dt \qquad \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$$

Partie C.

Dans cette partie, on étudie la fonction S *définie par*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$$

et on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}.$$

15. On suppose que la suite réelle $(a_n)_{n\geqslant1}$ est une suite décroissante de limite nulle et que la suite complexe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

15. a. Démontrer l'identité suivante pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{N} a_n(b_n-b_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n+1})b_n + a_{N+1}b_N - a_1b_0.$$

15. b. Démontrer que la série $\sum a_n(b_n-b_{n-1})$ est convergente.

16. Soient $0 < x < 2\pi$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{i(n+1)x/2}\,\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}.$$

17. Démontrer que la fonction S est définie sur $]0, 2\pi[$.

18. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $0 < x < 2\pi$.

18. a. Démontrer que

$$\left|\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{4k\sqrt{k}}.$$

18. b. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, 0 < x < 2\pi, \quad \left| \frac{e^{ix} - 1}{ix}\, S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\, dt \right| \leqslant C.$$

19. Déterminer la limite de

$$I(x) = \sqrt{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\, dt$$

lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

20. Calculer la limite de

$$\frac{e^{ix} - 1}{ix}$$

lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures. En déduire un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Solution I ❀ Nombres de Bernoulli

1. Nous allons procéder par récurrence forte (conformément à la relation de récurrence qui définit les nombres de Bernoulli).

❧ Le premier nombre de Bernoulli : $b_0 = 1$ est bien rationnel.

❧ Supposons que, pour un entier $n \geqslant 1$, les nombres de Bernoulli $b_0, \ldots, b_{n-1}$ soient des rationnels. Comme les coefficients binomiaux sont des *entiers*, la somme est bien un nombre rationnel et comme on en déduit b_n en divisant par l'*entier* $(n+1)$, le nombre b_n est aussi un nombre rationnel. Cela prouve que la famille

$$(b_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} = (b_k)_{0 \leqslant k < n+1}$$

est encore une famille de rationnels.

On a ainsi démontré par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad b_n \in \mathbb{Q}.$$

2. D'après la relation de récurrence,

$$b_1 = \frac{-1}{2}\binom{2}{0}b_0 = \frac{-1}{2},$$
$$b_2 = \frac{-1}{3}\Big[\binom{3}{0}b_0 + \binom{3}{1}b_1\Big] = \frac{1}{6}.$$

Ou, si on est plus savant (avec $k = 1$),

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = \frac{(-1)^0 2^1 \pi^2}{2!}\, b_2 = \pi^2 b_2.$$

3. En tant que somme d'une série convergente de réels strictement positifs, le réel $\zeta(2k)$ est strictement positif. D'après la formule d'Euler,

$$\frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!} \cdot (-1)^{k-1} \cdot b_{2k} > 0$$

donc b_{2k} est du signe de $(-1)^{k-1}$.

Autrement dit,
- — si k est impair, alors b_{2k} est positif (ce qu'on a constaté pour $k = 1$) ;
- — si k est pair, alors b_{2k} est négatif.

4. a. Les deux tests sont bien plus rapides à réaliser qu'un produit d'entiers, on peut les négliger.

De même, le calcul de la différence $n - p$ est sensiblement plus rapide qu'un produit d'entiers, on peut donc aussi la négliger.

D'après le code, il faut déjà calculer `f(30)`, `f(10)`, `f(20)`, ce qui fait

$$29 + 9 + 19 = 57$$

multiplications. Ensuite, il faut multiplier les deux facteurs du dénominateur, ce qui nous donne 58 multiplications.

Enfin, il faut calculer le quotient de la division euclidienne, ce qui est franchement plus long qu'une multiplication.

❧ Première amélioration : puisqu'il faut calculer 10!, 20! et 30!, il suffit de calculer 30! et, au moyen d'un simple test, conserver en mémoire les valeurs de 10! et de 20!. On n'effectuera ainsi qu'une trentaine de multiplications.

```
q = n-p
f_n = 1
for k in range(2,n+1):
    f_n *= k
    if k==p:
        f_p = f_n
    if k==q:
        f_q = f_n
```

❧ Deuxième amélioration : on calcule le coefficient binomial comme on a coutume de le calculer à la main.

$$\binom{30}{10} = \frac{30 \cdot 29 \cdot \cdots \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 10},$$

ce qui ne fait plus que 17 ou 18 multiplications (et toujours une division euclidienne).

4. b. L'opération // renvoie le quotient de la division euclidienne : c'est donc un *entier*.

L'opération / renvoie le quotient de la division réelle : c'est un *flottant*.

> ❦ *Si on manipule des entiers un peu trop grands, le calcul en flottant donne un résultat approché. On peut le voir comme un défaut, mais l'erreur relative est particulièrement faible. Est-ce vraiment un gros défaut ? (Ne répondez pas trop vite !)*
> ❦ *D'un autre côté, la taille en mémoire d'un flottant est fixe (contrairement aux entiers, dont la taille n'est limitée que par la mémoire de l'ordinateur). Si bien que les calculs algébriques (addition, multiplication, division) en flottants ont une complexité temporelle fixe alors que la complexité temporelle de ces opérations sur de grands entiers augmente considérablement avec la taille des entiers.*

5. Pour $n \geqslant p \geqslant 1$, on a $n - 1 \in \mathbb{N}$ et $p - 1 \in \mathbb{N}$. On peut donc utiliser la formule générale des coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)!}{p \cdot (p-1)! \cdot \big((n-1) - (p-1)\big)!} \\ &= \frac{n}{p} \cdot \binom{n-1}{p-1}.\end{aligned}$$

❧ Il y a deux types de cas de base :
- — si $p < 0$ ou si $p > n$, il n'y a rien à calculer et le résultat est nul ;
- — si $p = 0$, alors le coefficient binomial est égal à 1.

Pour le cas général, il suffit de coder la relation de récurrence qu'on vient d'établir.

```
def binom_rec(n,p):
    if p<0 or p>n:
        return 0
    elif p==0:
        return 1
    else:
        return (n*binom_rec(n-1,p-1))//p
```

❦ *Il faut cependant bien faire attention à ne pas diviser trop tôt par* p *: c'est le produit* $n\binom{n-1}{p-1}$ *qui est divisible par* p *et, a priori, lui seul !*

6. Comme on l'a observé dès le début, pour calculer b_n, il faut déjà connaître tous les nombres de Bernoulli précédents. On va donc les calculer de proche en proche (au moyen d'une boucle *for*) et les enregistrer dans une liste.

Initialement, la liste ne contiendra qu'un seul nombre :

$$L = (b_0) = (1)$$

et au terme de la bourcle *for*, elle contiendra les $(n+1)$ premiers nombres de Bernoulli :

$$L = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n) = (b_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}.$$

Il restera alors à renvoyer le dernier élément de la liste L.

Il est prudent d'écrire la relation de récurrence exactement comme on va la coder AVANT *d'écrire le code et en utilisant la convention de Python sur les intervalles d'indices.*
On peut alors être sûr des bornes de la boucle for*, des indices utilisés et donc du résultat obtenu.*

La valeur de b_0 nous est donnée par l'énoncé et nous allons calculer (boucle *for* sur l'indice i)

$$(b_1, \dots, b_n) = (b_{i-1})_{2 \leqslant i < n+2}$$

au moyen de la relation de récurrence :

$$b_{i-1} = \frac{-1}{i}\sum_{k=0}^{i-2}\binom{i}{k}b_k = \frac{-1}{i}\sum_{0 \leqslant k < i-1}\binom{i}{k}b_k$$

(boucle *for* sur l'indice k). On obtient ainsi un code plus léger que si on s'était contenté de suivre servilement la relation de l'énoncé.

```
def bernoulli(n):
    L = [1]
    for i in range(2, n+2):
        b = 0
        for k in range(i-1):
            b += binom(i, k)*liste_b[k]
            L.append(-b/i)
    return L[-1]
```

Solution II ❀ Intégrales de Fresnel

Partie A.

1. La fonction $h = \left[t \mapsto \exp(it^2)\right]$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$. D'après le Théorème fondamental, la fonction H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad H'(x) = h(x) = \exp(ix^2).$$

Comme $h = H'$ est en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$, la fonction H est en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On pourrait préciser que H *est* la primitive de h qui s'annule en $x = 0$, *mais le sujet ne demande rien de tel.*

2. La fonction H est, on vient de le voir, définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les deux complexes $H(x)$ et $H(-x)$ sont bien définis. De plus, le changement de variable affine $u = -t$ montre que

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^x e^{it^2}\,dt \\ &= \int_0^{-x} e^{i(-u)^2}\cdot(-\,du) = -H(-x). \end{aligned}$$

La fonction H est donc impaire.

On pourra retenir le sens du calcul précédent : si h *est une fonction paire, alors la primitive* H *de* h *qui s'annule en* $x = 0$ *est impaire.*
Mais on retiendra surtout qu'aucune autre primitive de h *n'est impaire !*

3. La fonction $\varphi = \left[u \mapsto \sqrt{u}\right]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $\left]0, x^2\right]$ et réalise une bijection (croissante) de $\left]0, x^2\right]$ sur $]0, x]$.

De plus, pour tout $u \in \left]0, x^2\right]$,

$$\frac{1}{2}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} = e^{i[\varphi(u)]^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}} = h\big(\varphi(u)\big)\cdot\left|\varphi'(u)\right|.$$

Comme la fonction h est intégrable sur $]0, x]$ (en tant que fonction continue sur le segment $[0, x]$), on déduit du Théorème de changement de variable que

$$\left[u \mapsto h\big(\varphi(u)\big)\cdot\left|\varphi'(u)\right|\right]$$

est intégrable sur $\left]0, x^2\right]$ et que

$$\int_{]0,x]} h(t)\,dt = \int_{]0,x^2]} h\big(\varphi(u)\big)\cdot\left|\varphi'(u)\right|\,du,$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x > 0, \quad H(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du.$$

4. D'après **[3.]** et la relation de Chasles,

$$\forall\, x > \sqrt{2\pi}, \qquad H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = \frac{1}{2}\int_{(\sqrt{2\pi})^2}^{x^2}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du.$$

Sur le segment $[2\pi, x^2]$, les fonctions

$$\left[u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}\right] \quad \text{et} \quad \left[u \mapsto -ie^{iu}\right]$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$. Donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} H(x) - H(\sqrt{2\pi}) &= \frac{1}{2}\left[-ie^{iu}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_{2\pi}^{x^2} \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{x^2}(-ie^{iu})\cdot\frac{-1}{2u\sqrt{u}}\,du \\ &= \frac{-ie^{ix^2}}{2\sqrt{x^2}} - \frac{-ie^{i2\pi}}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2}\frac{e^{iu}}{u\sqrt{u}}\,du. \end{aligned}$$

Comme $x > 0$, alors $\sqrt{x^2} = x$ et on sait que $e^{i2\pi} = 1$, donc

$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = \frac{-ie^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2}\frac{e^{iu}}{u\sqrt{u}}\,du.$$

5. On sait **[1.]** que l'intégrale $H(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par définition, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt$$

converge si, et seulement si,

$$H(x) = H(\sqrt{2\pi}) + \big(H(x) - H(\sqrt{2\pi})\big)$$

tend vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Revenons à **[4.]** : d'une part,

$$\left|\frac{-ie^{ix^2}}{2x}\right| = \frac{1}{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et d'autre part, la fonction

$$\left[u \mapsto \frac{e^{iu}}{u\sqrt{u}}\right]$$

est continue sur $[2\pi, +\infty[$ et intégrable au voisinage de $+\infty$ car

$$\left|\frac{e^{iu}}{u\sqrt{u}}\right| = \frac{1}{u^{3/2}}$$

(et $3/2 > 1$, comparaison aux intégrales de Riemann), donc l'intégrale généralisée

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u\sqrt{u}}\,du$$

est (absolument) convergente.

Par conséquent, la fonction H tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ (l'intégrale généralisée étudiée est convergente) et

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt = \int_0^{\sqrt{2\pi}} e^{it^2}\,dt + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u\sqrt{u}}\,du.$$

6. Une version de la méthode des rectangles donne :

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{n} \sum_{0\leqslant k<n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big).$$

On remarquera que les indices de la somme coïncident avec la commande `range`.

❧ Pour éviter les calculs inutiles, on va bien entendu calculer le *pas* de la méthode une fois pour toutes au début de la fonction.

$$\delta = \frac{b-a}{n}$$

❧ Les additions étant moins coûteuses en temps de calcul que les multiplications, on doit prendre conscience que les abscisses utilisées définissent une suite arithmétique.

$$x_{k+1} = a + (k+1)\frac{b-a}{n} = x_k + \delta$$

❧ Le reste du code est sans mystère.

```
def I(f,a,b,n):
    delta = (b-a)/n
    s, x = 0, a
    for k in range(n):
        s += f(x)
        x += delta
    return delta*s
```

7. Pour coder la fonction h, on a le choix : définir une fonction auxiliaire à l'intérieur de la fonction H ou définir une fonction globale (utilisable par d'autres fonctions). Vu l'ampleur du projet, j'ai opté pour la fonction auxiliaire !

```
def H(x,n):
    def h(t):
        return exp(1j*t**2)
    return I(h,0,x,n)
```

Partie B.

8. Quels que soient les réels x et t,

$$|e^{-x^2(t^2-i)}| = |\underbrace{e^{-x^2t^2}}_{>0}\underbrace{e^{ix^2}}_{\in\mathbb{U}}| = e^{-x^2t^2}$$

et $|t^2 - i| = \sqrt{(t^2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{t^4+1}$.

9. Pour tout $x \in \Omega = \mathbb{R}$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ car

$$f(x,t) = \frac{ae^{bt^2}}{t^2 - i}$$

et le dénominateur n'est jamais nul. D'après **[8.]**,

$$\big|f(x,t)\big| = \frac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}} = \frac{1}{t^2}\cdot\frac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{1+(1/t)^4}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$$

donc $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (comparaison avec une intégrale de Riemann).

> *La relation de comparaison*
>
> $$f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$$
>
> *n'est vraie que pour $x \neq 0$. Autrement dit, on a utilisé un $\mathcal{O}$ uniquement pour tenir compte du cas particulier $x = 0$.*

Comme la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est *paire*, elle est aussi intégrable au voisinage de $-\infty$. Par conséquent, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I.

❧ Pour tout $t \in I$, il est clair que

$$\left[x \mapsto f(x,t) = ae^{-bx^2}\right]$$

est continue sur Ω.

❧ Enfin, quels que soient $x \in \Omega$ et $t \in I$,

$$\big|f(x,t)\big| = \frac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} = \big|f(0,t)\big|.$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur I (ainsi qu'on l'a déjà démontré), donc la condition de domination est assurée.

❧ D'après le Théorème de continuité, la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction u_n en posant

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad u_n(t) = f(x_n, t).$$

D'après **[9.]**, toutes les fonctions u_n sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et comme ces fonctions sont *paires*,

$$\begin{aligned} g(x_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_n(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt \\ &= 2\int_{]0,+\infty[} u_n(t)\,dt. \end{aligned}$$

De plus,

$$\forall\, t > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} u_n(t) = 0$$

donc la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle.

> *Attention, la suite de terme général $u_n(0)$ est divergente ! C'est d'ailleurs pour cette raison qu'on est passé d'une intégrale sur $\mathbb{R}$ à une intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Enfin, comme on l'a vu à la question précédente,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t > 0, \quad \big|u_n(t)\big| \leqslant \big|f(0,t)\big|,$$

donc la convergence est dominée (majorant indépendant de n et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$).

On peut donc déduire du Théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = 2\int_{]0,+\infty[} 0\,dt = 0.$$

❧ Ce qui précède est vrai pour *toute* suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$. Par caractérisation séquentielle de la limite, on a démontré que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

> *Le sujet aurait pu laisser l'initiative aux candidats : le cours contient une généralisation du Théorème de continuité qui permet de justifier directement que la fonction g tend vers 0 au voisinage de $\pm\infty$.*
> *Les auteurs du sujet ont choisi d'interroger les candidats sur la caractérisation séquentielle des limites : il s'agit ici d'une question de cours déguisée.*

❧ Il est clair que la fonction g est <u>paire</u>, donc

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$

par symétrie.

11. Nous allons maintenant appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$.

❧ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(t^2-i)}.$$

❧ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ **[9.]**.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x = 0$, elle est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ et pour $x \neq 0$, elle est intégrable au voisinage de $+\infty$ car

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = 2|x|e^{-x^2t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-t}).$$

Cette fonction étant *paire*, elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

❧ Enfin, quels que soient $0 < a < b$,

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in [a,b], \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2be^{-a^2t^2}.$$

Ce majorant est indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}$ en fonction de t (on a déjà expliqué pourquoi). La condition de domination est donc satisfaite.

❧ Ainsi, quel que soit le segment $[a,b]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et

$$\forall\, x \in [a,b], \quad g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

On en déduit que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$$]0,+\infty[= \bigcup_{0<a<b} [a,b]$$

et que

$$\forall\, x > 0, \quad g'(x) = -2x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2(t^2-i)}\,dt.$$

La fonction g étant *paire*, elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad g'(x) = -2x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2(t^2-i)}\,dt.$$

> *Les deux expressions sont des fonctions* impaires *de x : comme elles sont égales sur $\mathbb{R}_+^*$, elles sont aussi, par symétrie, égales sur $\mathbb{R}_-^*$.*

12. Pour $x > 0$, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2e^{ix^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2}\cdot x\,dt \\ &= -2e^{ix^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2} \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $u = xt$ et en utilisant pour finir le résultat rappelé par l'énoncé.

> *Cette fois, l'expression du second membre apparaît comme une fonction* paire *de x. Comme la fonction g' est toujours impaire, on en déduit que*
>
> $$\forall\, x < 0, \quad g'(x) = +2\sqrt{\pi}e^{-x^2}.$$
>
> *Il faut se rappeler que le changement de variable $u = xt$ n'a de sens que pour $x \neq 0$ et que, dans le cas $x < 0$, ce changement de variable est* décroissant *— d'où la nécessité de changer de signe.*

13. a. Le degré de la fraction F est strictement négatif et elle admet deux pôles simples opposés $\pm z_0$, où $z_0^2 = i$.

Comme $i = e^{i\pi/2} = (e^{i\pi/4})^2$, alors les deux pôles de F sont $\pm e^{i\pi/4}$.

> *Il est beaucoup plus simple de faire les calculs avec $\pm z_0$. On n'explicitera donc les calculs qu'à la fin.*

D'après le Théorème de décomposition en éléments simples, il existe deux nombres complexes a et b tels que

$$\frac{1}{X^2 - z_0^2} = \frac{a}{X - z_0} + \frac{b}{X + z_0}.$$

Quelle que soit la méthode employée, on trouve rapidement que

$$a = \frac{1}{2z_0} = -b.$$

Par conséquent, la décomposition de F en éléments simples est

$$F = \frac{e^{-i\pi/4}}{2} \cdot \left(\frac{1}{X - e^{i\pi/4}} - \frac{1}{X + e^{i\pi/4}}\right).$$

> *On pourrait remplacer $e^{i\pi/4}$ par*
>
> $$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$
>
> *mais ça ne ferait que compliquer la lecture du résultat.*

13. b. On reprend les notations de la question précédente et... double astuce taupinale !

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2z_0}\left(\frac{X - \overline{z_0}}{(X - z_0)(X - \overline{z_0})} - \frac{X + \overline{z_0}}{(X + z_0)(X + \overline{z_0})}\right) \\ &= \frac{1}{2z_0}\left(\frac{X - \overline{z_0}}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} - \frac{X + \overline{z_0}}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}\right) \end{aligned}$$

puisque

$$(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos\theta X + 1$$

et que $\cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$.

Un couple constitué d'un polynôme constant (non nul) et d'un polynôme de degré 1 est une base de $\mathbb{R}_1[X]$ et chaque polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ peut se décomposer dans une telle base. Il existe donc quatre nombres complexes a, b, c et d tels que

$$\begin{aligned} \frac{X - \overline{z_0}}{2z_0} &= b + a(2X - \sqrt{2}) \\ -\frac{X + \overline{z_0}}{2z_0} &= d + c(2X + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

> *On obtient ainsi une décomposition* utile *de F (nécessaire pour calculer les primitives de la fonction rationnelle associée à F), mais ce n'est pas une décomposition en éléments simples de F.*
> La seule *décomposition en éléments simples de la fraction* complexe *F a été donnée au **[13.a.]**.*

13. c. Une fois encore, nous allons poser les calculs de manière abstraite, histoire de ne pas nous fatiguer inutilement.

❧ Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction

$$\varphi = \left[t \mapsto \frac{1}{(t - a)^2 + b^2}\right]$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(t) \sim 1/t^2$ au voisinage de $\pm\infty$, donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \lim_{\substack{u \to -\infty \\ v \to +\infty}} \int_u^v \varphi(t)\,dt.$$

Or, quels que soient $u < v$,

$$\int_u^v \frac{dt}{(t - a)^2 + b^2} = \left[\frac{1}{b} \operatorname{Arctan} \frac{t - a}{b}\right]_u^v.$$

Comme $b > 0$, le quotient $(t - a)/b$ tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) lorsque t tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$), donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \frac{\pi}{b}.$$

❧ Il reste à mettre les deux dénominateurs sous forme canonique.

$$\begin{aligned} t^2 - \sqrt{2}t + 1 &= (t - \sqrt{2}/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^2 \\ t^2 + \sqrt{2}t + 1 &= (t + \sqrt{2}/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^2 \end{aligned}$$

donc $b = 1/\sqrt{2}$ dans les deux cas et les deux intégrales sont égales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} = \pi\sqrt{2}.$$

> *On peut aussi vérifier que les deux intégrales sont égales avec le changement de variable affine $u = -t$.*

13. d. D'après **[9.]**, **[13.b.]**, **[13.c.]** et les valeurs de a, b, c et d données par l'énoncé,

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,dt \\ &= a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} - \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + t\sqrt{2} + 1}\,dt + 2b\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

> *On sait depuis **[9.]** que la fonction rationnelle F est intégrable sur $\mathbb{R}$.*
> *Cependant, dans la décomposition de F au **[13.b.]**, seules deux des quatre fonctions rationnelles sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (celles que l'on a calculées au **[13.c.]**). Les deux autres ne sont pas intégrables sur $\mathbb{R}$, c'est* leur somme *qui est intégrable.*

Quels que soient les réels $u < v$,

$$\begin{aligned} \int_u^v \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}\,dt &= \left[\ell n(t^2 - \sqrt{2}t + 1)\right]_u^v \\ \int_u^v \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1}\,dt &= \left[\ell n(t^2 + \sqrt{2}t + 1)\right]_u^v \end{aligned}$$

donc la différence

$$\int_u^v \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}\,dt$$

est égale à

$$\left[\ell n \frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right]_u^v.$$

Il est clair que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \ell n \frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1} = 0,$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1} - \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}\,dt = 0.$$

❧ Finalement,

$$g(0) = 2b\pi\sqrt{2} = \frac{(1+i)\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}}.$$

14. Comme la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ **[11.]**, on déduit du Théorème fondamental que

$$\forall\, x, x_0 > 0, \quad g(x) = g(x_0) + \int_{x_0}^{x} g'(t)\,dt.$$

De plus, la fonction g est continue en 0 **[9.]**, donc

$$g(x_0) \xrightarrow[x_0\to 0]{} g(0) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}}$$

d'après **[13.d.]**. Enfin, d'après l'expression **[12.]** de $g'(t)$,

$$\int_{x_0}^{x} g'(t)\,dt \xrightarrow[x_0\to 0]{} \int_0^x -2\sqrt{\pi}e^{it^2}\,dt = -2\sqrt{\pi}H(x).$$

On en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi}H(x).$$

Par définition, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt$$

est convergente si, et seulement si, $H(x)$ *tend vers une limite finie lorsque* x *tend vers* $+\infty$ *— et dans ce cas, l'intégrale généralisée est égale à la limite de* H.

❧ D'après **[10.]**,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

et donc, d'après ce qui précède,

$$\lim_{x\to+\infty} H(x) = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

On a ainsi démontré que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt$$

était convergente et égale à $\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

Par définition, si φ *est une fonction à valeurs complexes et si l'intégrale généralisée*

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$$

est convergente, alors les deux intégrales généralisées

$$\int_0^{+\infty} \mathfrak{Re}\,\varphi(t)\,dt \quad \textit{et} \quad \int_0^{+\infty} \mathfrak{Im}\,\varphi(t)\,dt$$

sont elles aussi convergentes et

$$\int_0^{+\infty} \mathfrak{Re}\,\varphi(t)\,dt = \mathfrak{Re}\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$$

$$\textit{et} \quad \int_0^{+\infty} \mathfrak{Im}\,\varphi(t)\,dt = \mathfrak{Im}\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt.$$

❧ On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Partie C.

15. a. Pour $N \geqslant 1$, on pose

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n(b_n - b_{n-1}).$$

Alors, avec les techniques usuelles (développement, changement d'indice, astuce taupinale...),

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \sum_{n=1}^{N} a_n b_{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} b_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \Big(a_1 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_{n+1} b_n - a_{N+1} b_N\Big) \\ &= -a_1 b_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N. \end{aligned}$$

15. b. Par définition, la série $\sum a_n(b_n - b_{n-1})$ converge si, et seulement si, la suite $(S_N)_{N\geqslant 1}$ de ses sommes partielles converge.

Dans l'expression de S_N qu'on vient de trouver,

— le terme $-a_1 b_0$ est constant ;

— le produit $a_{N+1} b_N$ tend vers 0 (car a_{N+1} tend vers 0 pendant que b_N est borné) ;

— comme la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |b_n| \leqslant \|b\|_\infty$$

et comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante,

$$\begin{aligned} \big|(a_n - a_{n+1}) b_n\big| &= \overbrace{(a_n - a_{n+1})}^{\geqslant 0} \cdot |b_n| \\ &\leqslant (a_n - a_{n+1}) \cdot \|b\|_\infty. \end{aligned}$$

Le majorant est le terme général d'une série télescopique convergente donc, par encadrement, la série $\sum(a_n - a_{n+1})b_n$ est absolument convergente et la suite de ses sommes partielles est donc convergente.

Ainsi, la suite $(S_N)_{N\geqslant 1}$ est convergente en tant que somme de trois suites convergentes. Cela prouve que la série $\sum a_n(b_n - b_{n-1})$ est convergente.

16. Comme $0 < x < 2\pi$, on reconnaît une somme géométrique de raison $e^{ix} \neq 1$. Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix} \cdot \frac{(e^{ix})^n - 1}{e^{ix} - 1}.$$

En factorisant le numérateur et le dénominateur par la technique de l'angle moitié, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{i(n+1)x/2} \cdot \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}.$$

17. Il est clair que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

est décroissante et tend vers 0.

En posant $b_0 = 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n - b_{n-1} = e^{inx},$$

on obtient

$$b_n = b_0 + \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx}.$$

D'après **[16.]**,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |b_n| = \frac{|\sin(nx/2)|}{|\sin(x/2)|} \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

donc cette suite complexe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

> *La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $0 < x < 2\pi$, mais elle n'est pas bornée uniformément en x : le majorant dépend visiblement de x et lorsque x tend vers 0 ou vers 2π, le majorant tend vers $+\infty$.*

D'après **[15.b.]**, la suite de terme général

$$\sum_{n=1}^{N} a_n(b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$$

est convergente pour tout $0 < x < 2\pi$.

Autrement dit, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, 2\pi[$, donc sa somme S est bien définie sur $]0, 2\pi[$.

18. a. Il faut commencer par deviner que

$$\frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} = \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{k}}\,dt.$$

On étudie donc en fait

$$\Delta = \int_k^{k+1} e^{itx}\Big(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\Big)\,dt.$$

D'après l'inégalité triangulaire et la positivité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
|\Delta| &\leqslant \int_k^{k+1} \Big(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\Big)\,dt = \int_k^{k+1} \frac{\sqrt{t}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{t}}\,dt \\
&\leqslant \int_k^{k+1} \frac{\sqrt{t}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k}}\,dt && (\text{car } \sqrt{t} \geqslant \sqrt{k}) \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{\sqrt{1+\frac{u}{k}} - 1}{\sqrt{k}}\,du && (t = k+u) \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{u}{2k\sqrt{k}}\,du = \frac{1}{4k\sqrt{k}}
\end{aligned}$$

puisque, par concavité de la racine carrée,

$$\forall\, s \geqslant -1, \qquad \sqrt{1+s} \leqslant 1 + \frac{s}{2}.$$

18. b. Par **[5.]**, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} H(x)$$

est convergente. Par **[3.]**, on en déduit que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du$$

est elle aussi convergente. Le changement de variable affine $u = xt$ montre alors que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{xt}} x\,dt = \sqrt{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}}\,dt$$

est convergente et on en déduit enfin que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}}\,dt$$

est convergente.

❧ La série $\sum 1/k^{3/2}$ est une série de Riemann convergente. On peut donc définir un réel C en posant

$$C = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k\sqrt{k}}.$$

Par **[18.a.]**, la série

$$\sum \Big|\frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}}\,dt\Big|$$

est convergente et sa somme est majorée par C.

❧ D'après la relation de Chasles,

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Par ailleurs, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{e^{ix}-1}{ix} S(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ix}-1}{ix} \cdot \frac{e^{ikx}}{\sqrt{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}}.
\end{aligned}$$

La différence

$$\frac{e^{ix}-1}{ix}\,S(x)-\int_1^{+\infty}\frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}}\,dt$$

est donc égale à

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}}-\int_k^{k+1}\frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Par inégalité triangulaire, la valeur absolue

$$\left|\frac{e^{ix}-1}{ix}\,S(x)-\int_1^{+\infty}\frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}}\,dt\right|$$

est majorée par

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}}-\int_k^{k+1}\frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}}\,dt\right|$$

et donc par le réel C défini ci-dessus.

On a ainsi démontré qu'il existait un réel C, indépendant de x, tel que

$$\forall\, 0<x<2\pi,\qquad \left|\frac{e^{ix}-1}{ix}\,S(x)-\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt\right|\leqslant C.$$

19. On a déjà vu à la question précédente que l'intégrale généralisée

$$I(x)=\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{tx}}\,x\,dt$$

était convergente. Le même changement de variable affine $u=xt$ montre que

$$I(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du.$$

On a également déjà démontré que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du$$

était convergente. On en déduit que, par définition d'une intégrale généralisée,

$$\lim_{x\to 0}I(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du.$$

Par **[3.]** et **[5.]**,

$$\lim_{x\to 0}I(x)=\lim_{y\to+\infty}2H(y)=2\int_0^{+\infty}e^{it^2}\,dt$$

et d'après **[14.]**,

$$\lim_{x\to 0}I(x)=\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}.$$

20. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,

$$\frac{e^{ix}-1}{ix}=\frac{(\cos x-1)+i\sin x}{ix},$$

ce qui tend vers 1 lorsque x tend vers 0, puisque

$$\cos x-1\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-x^2}{2}\quad\text{et}\quad \sin x\underset{x\to 0}{\sim}x.$$

> *On aurait aussi pu invoquer le développement limité de* exp *au voisinage de* 0*, car ce développement limité est valable aussi pour la variable complexe :*
>
> $$e^{ix}\underset{x\to 0}{=}1+ix+\frac{(ix)^2}{2}+\cdots+\frac{(ix)^n}{n!}+o(x^n).$$
>
> *(Bien entendu, ici, il suffit de prendre* $n=1$.*)*

❧ La conclusion de **[18.b.]** peut aussi s'écrire de la manière suivante.

$$\frac{e^{ix}-1}{ix}\,S(x)\underset{x\to 0}{=}\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt+\mathcal{O}(1)$$

En multipliant par l'infiniment petit $\sqrt{x}$ (le réel x tend vers 0 par valeurs positives), on en déduit que

$$\frac{e^{ix}-1}{ix}\sqrt{x}\,S(x)\underset{x\to 0}{=}I(x)+\mathcal{O}(\sqrt{x}).$$

Par **[19.]** et le début de cette question,

$$\sqrt{x}\,S(x)\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

et comme cette limite n'est pas nulle, on en déduit enfin que

$$S(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}.$$