Exercice 1
Nous dirons ici que l'intégrale $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ existe **au sens propre** lorsque la fonction f est intégrable sur l'intervalle I.
Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ les intégrales suivantes existent-elles au sens propre ?

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1-x\cos t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

Les intégrales suivantes existent-elles au sens propre ?

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ell\mathrm{n}(1+t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t-1} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ell\mathrm{n}(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos \pi t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \sin\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t\,\mathrm{Arctan}\, t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \ell\mathrm{n}(1+e^{-t})\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t-1}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \cos(t^2)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\ell\mathrm{n}^2 t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos {}^1\!/\!{}_{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \sin[\tan(\cos t)]\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{Arg\,ch}\,\frac{1+t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\cos(1/t)}}$$

$$\int_{1515}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\ell\mathrm{n}\,\ell\mathrm{n}\, t)^{\ell\mathrm{n}\, t}} \qquad \int_{1789}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\ell\mathrm{n}\, t)^{\ell\mathrm{n}\,\ell\mathrm{n}\, t}}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin({}^1\!/\!{}_{t^2})}{\ell\mathrm{n}(1+\sqrt{t})}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\, t}{t\,\ell\mathrm{n}(2+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2
Démontrer que les intégrales suivantes existent au sens propre et vérifier leur valeur.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(e^t+1)(e^{-t}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\,\ell\mathrm{n}\, t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}\, t} = 2\,\mathrm{Arg\,th}\,\frac{1}{e} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} = \ell\mathrm{n}\, 2$$

$$\int_0^1 \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -4 \qquad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^t+1}} = 2\,\mathrm{Arg\,th}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{3\cos^2 t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^{1/3}-1}{t(1+t)^{2/3}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} \qquad \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t-t^2}} = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^1 \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = -4+4\,\ell\mathrm{n}\, 2$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t}-1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t = 2\,\ell\mathrm{n}\, 2 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t}(t+1)^3} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27} \qquad \int_0^{\pi/2} \sin t\,\ell\mathrm{n}(\sin t)\,\mathrm{d}t = \ell\mathrm{n}\, 2 - 1$$

$$\int_0^1 \frac{\ell\mathrm{n}(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -2\,\ell\mathrm{n}\, 2 \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{2}-1$$