6
Nombres réels

I
Inégalités

1. Soient f et g, deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe un réel t_0 tel que $f(t_0) = g(t_0)$.

1. Développer $(a+b)^2 - (a-b)^2$.
2. On suppose que $f+g$ est constante. Démontrer que $f.g$ atteint son maximum en t_0.
3. On suppose que $f.g$ est constante. Démontrer que $f+g$ atteint son minimum en t_0.

2. Soient a et b, deux réels strictement positifs. Démontrer que
$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

3. **Densité de** $\mathbb{Q}$
Soit $f : \mathbb{R}$, une fonction croissante telle que
$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer $f(0)$, puis $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
2. Démontrer par récurrence que $f(n) = nf(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que $f(r) = rf(1)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
4. Démontrer que
$$\Big(x - \frac{1}{n}\Big) f(1) \leqslant f(x) \leqslant \Big(x + \frac{1}{n}\Big) f(1)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, et conclure.

4.
$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

5. Le triangle de sommets
$$A = (0,2), \quad B = (4,3) \quad \text{et} \quad C = (1,-1)$$
est caractérisé par le système suivant.
$$\begin{cases} x - 4y + 8 \geqslant 0 \\ 4x - 3y - 7 \leqslant 0 \\ 3x + y - 2 \geqslant 0 \end{cases}$$

II
Partie entière

6. **Densité de** $\mathbb{Q}$
Soient $a < b$, deux réels.
6.1 On cherche deux entiers $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que
$$a < \frac{n}{p} < b.$$
Si p est choisi tel que $p(b-a) > 1$, il suffit de choisir $n = \lfloor pb \rfloor$.
6.2 Si $]a, b[\subset \mathbb{Q}$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que
$$]-\alpha, \alpha[\subset \mathbb{Q}$$
et donc $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
7.1 Comparer $\lfloor -x \rfloor$ et $-\lfloor x \rfloor$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
7.2 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que
$$x < n \leqslant y \iff \lfloor x \rfloor < n \leqslant \lfloor y \rfloor.$$
7.3 Comparer $\lfloor x+n \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + \lfloor n \rfloor$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
7.4 Comparer $\lfloor x+y \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ pour $y \in \mathbb{R}$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Condition nécessaire et suffisante sur $x \in \mathbb{R}$ pour que
$$\lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor.$$

9. Soit $\tau \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose
$$f_\tau(t) = \tau \left\lfloor \frac{t}{\tau} \right\rfloor.$$
Démontrer que
$$\forall\, s \leqslant t, \quad f_\tau(t) - f_\tau(s) \leqslant \tau + (t-s).$$

III
Borne supérieure

10. Soient $A \subset B$, deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Démontrer que
$$\sup A \leqslant \sup B \quad \text{et} \quad \inf A \geqslant \inf B.$$

11. Soient A et B, deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. La partie
$$A - B = \big\{a - b,\ (a,b) \in A \times B\big\}$$
est bornée et
$$\sup(A-B) = \sup A - \inf B,$$
$$\inf(A-B) = \inf A - \sup B.$$

12. Soit $A \subset \mathbb{R}$, une partie non vide. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$\mathrm{d}(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|.$$
12.1 Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que
$$\lim_{n\to+\infty} |x - u_n| = \mathrm{d}(x, A).$$
Cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Donner un exemple de partie A pour laquelle la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge nécessairement.
Donner un exemple de partie A pour laquelle la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas nécessairement.
12.2 Démontrer que
$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \big|\mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(y,A)\big| \leqslant |x - y|.$$

13. Soient f et g, deux applications bornées de Ω dans $\mathbb{R}$. Démontrer que
$$\sup_{x\in\Omega} f(x) + g(x) \leqslant \sup_{x\in\Omega} f(x) + \sup_{x\in\Omega} g(x).$$
Étudier le cas d'égalité.

14. Fonctions monotones
Une fonction croissante de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ admet-elle une limite finie au voisinage de $+\infty$? au voisinage de 0 ?

15. On considère
$$A = \{2^{-m-n},\ (m,n) \in \mathbb{N}^2\}.$$
Calculer les bornes supérieure et inférieure de A.

16. Pour tout $\alpha > 0$, on considère l'ensemble
$$U_\alpha = \{\sin n\alpha,\ n \in \mathbb{N}\}$$
1. On suppose ici que le quotient α/π est rationnel. Alors l'ensemble U_α est fini. Quel est son maximum ?
2. On **admet** que : si le quotient α/π est irrationnel, alors l'ensemble U_α est dense dans $[-1,1]$. Que vaut alors $\sup U_\alpha$?
3.
$$\inf_{0<\alpha<\pi} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sin n\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

IV

Suites

17. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
17.1 Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors il existe $\alpha > 0$ et $N_0 \in \mathbb{N}$ tels que
$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad u_n \geqslant \alpha.$$
17.2 Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, alors $u_n \geqslant 1/2$ à partir d'un certain rang.
17.3 Si $u_n \sim v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

18. Suites réelles bornées
18.1 Exemple de suite réelle bornée n'admettant pas de plus grand terme.
18.2 Une suite réelle positive et de limite nulle admet un plus grand terme.
18.3 Que dire d'une suite croissante qui admet un plus grand terme ?

19. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$M_n = \sup_{0\leqslant k\leqslant n} u_k,$$
$$m_n = \inf_{0\leqslant k\leqslant n} u_k.$$
Alors les deux suites $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

20. On considère une suite réelle bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on pose
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad s_n = \sup_{m\geqslant n} u_m \quad \text{et} \quad i_n = \inf_{m\geqslant n} u_n.$$
Démontrer que les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. Sont-elles convergentes ?

21. Si les trois suites extraites
$$(u_{3p+1})_{p\in\mathbb{N}}, \quad (u_{3p+2})_{p\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (u_{6p})_{p\in\mathbb{N}}$$
convergent vers 0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 0 ?

22. Si les deux suites $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi.

23. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle NON majorée, alors il existe une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

24. On pose $u_n = 1$ si l'entier n est premier et $u_n = 0$ sinon. Alors, quel que soit $k \geqslant 2$, la suite extraite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

25. On considère l'ensemble
$$U = \{\sin(\ell n\, n),\ n \in \mathbb{N}^*\} \subset [-1,1].$$
1. Quels que soient les entiers $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$,
$$0 < \ell n(n_0+k+1) - \ell n(n_0+k) \leqslant \frac{1}{n_0}.$$
2. L'ensemble U est dense dans $[-1,1]$.

26. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On suppose que u_n est représenté sous forme irréductible par
$$u_n = \frac{p_n}{q_n}.$$
1. Si la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors l'ensemble
$$Q = \{q_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$
est une partie finie de $\mathbb{N}^*$.
2. Dans ces conditions, l'ensemble
$$[x-1, x+1] \cap \left\{\frac{k}{q},\ k \in \mathbb{Z},\ q \in Q\right\}$$
est fini lui aussi.
3. La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Que dire de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Suites réelles et complexes

1. Questions de cours

1.1 Démontrer que la suite de terme général $(-1)^n$ diverge.

1.2 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Donc...

1.3 Quelles sont les opérations possibles sur les équivalents ?

2. On considère une suite positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2u_n}{3u_n+1} = 0.$$

Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}.$$

La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée.

4. Les suites de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n!}$$

sont adjacentes.

5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

1. Les suites extraites de terme général S_{2p} et S_{2p+1} sont adjacentes.
2. La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est donc convergente.

6. Soient $0 < a < b$. On suppose que $u_0 = a$, $v_0 = b$ et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}.$$

Alors les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. Quelle est cette limite ?

I

Encadrements

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}.$$

Alors

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{1}{4n} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n}$$

et la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.

8. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} e^{-2k}.$$

Alors

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant S_n \leqslant n.e^{-2(n+1)}$$

donc la suite (S_n) tend vers 0.

9. En comparant la somme

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{n(n+1)} \frac{1}{k^2}$$

à une intégrale, on montre que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.

10. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2} \sim n \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi n}{4}.$$

11. On choisit $u_0 \in \mathbb{R}$ et on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

Démontrer que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et que $u_n = \mathcal{O}(1/n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

12. On suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n, v_n \leqslant 1$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1.$$

Alors les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 1.

13. Pour tout $x \geqslant 0$,

$$0 \leqslant x - \ell\mathrm{n}(1+x) \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

En déduire le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \frac{k}{n^2}\Big).$$

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, positive et tend vers 0.

15. On considère deux suites réelles strictement positives $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

à partir d'un certain rang.

1. Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers 0.
2. Si la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers $+\infty$.
3. Si le quotient a_{n+1}/a_n tend vers une limite $\ell < 1$, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

16. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1 \quad \text{et} \quad (1-u_n)u_{n+1} > 1/4.$$

1. Étudier $f = [x \mapsto x(1-x)]$ sur $[0, 1]$.

2. Pour tout $n \geqslant 2$,

$$(1-u_0)u_n \prod_{k=1}^{n-1} f(u_k) > \frac{1}{4^n}.$$

3. On choisit $0 < \alpha < 1/2$ et, pour tout $n \geqslant 1$, on note m_n, le nombre d'indices $1 \leqslant k < n$ tels que

$$u_k \notin [1/2 - \alpha, 1/2 + \alpha].$$

Alors, pour tout $n \geqslant 2$,

$$(1-u_0)u_n > \left[\frac{1}{4\alpha(1-\alpha)}\right]^{m_n}$$

4. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge donc vers $1/2$.

II

Équivalents

17. Pièges à ...

17.1 On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Que dire des équivalents suivants ?

1.
$$\cos u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 + \frac{u_n^2}{2}$$

2.
$$\exp(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 - u_n$$

3.
$$\operatorname{sh} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n + \frac{u_n^3}{3}$$

4.
$$\operatorname{ch} u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$$

17.2 On suppose que $u_n \sim v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'équivalence

$$u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$

est-elle vraie ?

6. Dans quels cas l'équivalence

$$e^{u_n} \sim e^{v_n}$$

est-elle vraie ?

7. Pour quelles extractrices φ l'équivalence

$$u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$$

est-elle vraie ?

18. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Alors la suite de terme général

$$v_n = \frac{\ell\text{n}(1+2u_n^2)}{1-\cos u_n}$$

tend vers 4.

19. Soient $\alpha, \beta > 0$. Alors

$$\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^\beta} = \exp\left[n^\beta \,\ell\text{n}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]$$

tend vers e si $\beta = \alpha$; vers 0 si $\beta < \alpha$ et vers $+\infty$ si $\beta > \alpha$.

20. Calculer un équivalent simple pour chaque expression.

1.
$$n\sqrt{\frac{n-1}{3n+1}}$$

2.
$$\ell\text{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}\right)$$

3.
$$\ell\text{n}\left(n^2-\frac{1}{n}\right)$$

4.
$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+2}-\frac{2}{n+1} \sim \frac{1}{n^2}$$

5.
$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}-\frac{1}{n} \sim \frac{-1}{2n^3}$$

6.
$$\frac{n\sin^2(2/n)}{\sqrt{n^2+1}-n} \sim 8$$

21. Formule de Stirling

On admet que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n.$$

Alors

$$(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n}e^{-2n}(2n)^{2n}$$

et

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

22. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$M_n = \frac{u_0+\cdots+u_n}{n+1}.$$

1. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et si la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

23. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général strictement positif et on suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}.$$

En admettant le Théorème de Cesaro, démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

III

Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

24.1 La suite définie par $u_0 = 3$ et $u_1 = 0$ et par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n = 0$$

a pour expression générale

$$u_n = 2.1^n + 1.(-2)^n.$$

24.2 La suite définie par $u_0 = 4$ et $u_1 = -5$ et par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2}+3u_{n+1}+2u_n = 0$$

a pour expression générale

$$u_n = 3.(-1)^n + 1.(-2)^n.$$

24.3 La suite définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = -4$ et par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + 5u_{n+1} + 6u_n = 0$$

a pour expression générale

$$u_n = -(-2)^n + 2.(-3)^n.$$

24.4 La suite définie par $u_0 = 5$ et $u_1 = -7$ et par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 2u_{n+2} + 5u_{n+1} + 2u_n = 0$$

a pour expression générale

$$u_n = 2.(^{-1}/_2)^n + 1.(^{-1}/_2)^n.$$

24.5 La suite définie par $u_0 = 3$ et $u_1 = {}^1/_2$ et par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 4u_{n+2} - u_n = 0$$

a pour expression générale

$$u_n = 2.(^1/_2)^n + 1.(^{-1}/_2)^n.$$

24.6 La suite définie par $u_0 = 4$ et $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 3u_{n+2} - 5u_{n+1} - 2u_n = 0$$

a pour expression générale

$$u_n = 3.(^{-1}/_3)^n + 1.2^n.$$

24.7 Une suite qui vérifie la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 3u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0$$

a pour expression générale

$$u_n = A.(^2/_3)^n + B.1^n.$$

25. **Matrice de Jacobi**
Soit $N \in \mathbb{N}$, supérieur à 2.
Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ existe-t-il une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 = u_{N+1} = 0$$

et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2\lambda u_{n+1} + u_n = 0\ ?$$

26. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

alors la suite de terme général $v_n = e^{u_n}$ vérifie la relation de récurrence

$$v_{n+2} = v_{n+1}^a v_n^b.$$

En déduire l'expression générale des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les relations suivantes.

1.
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \frac{v_n^2}{v_{n+1}}$$

2.
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \frac{1}{v_n^2 v_{n+1}^3}$$

3.
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \sqrt[3]{v_{n+1}^5 . v_n^2}$$

4.
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \sqrt[3]{\frac{v_{n+1}^5}{v_n^2}}$$

27. **Suite de Fibonacci**
On pose $F_0 = F_1 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels qui tend vers $+\infty$.

28. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le nombre

$$u_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}$$

est entier.

1. Avec la formule du binôme.
2. En remarquant que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2u_{n+1} - u_n = 0.$$

Cette relation prouve aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

29. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$$

1. Démontrer que $u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que la suite de terme général

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

est une suite arithmétique.

3. En déduire le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

30. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = -1$ et la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{2+u_n}.$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Démontrer que la suite de terme général

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$$

est géométrique. En déduire le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

31. Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n + 4.$$

(Il existe une solution particulière constante : pourquoi ?)

IV

Suites récurrentes

32. **Questions de cours**
On considère une suite qui vérifie la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Si la fonction f est croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Comment déterminer le sens de variation de la suite ?
2. Si la fonction f est décroissante, alors les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies contraires. Comment déterminer leurs sens de variation respectifs ?

3. On suppose que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant k|u_n - \ell|.$$

En déduire une estimation de $|u_n - \ell|$ pour $n \geqslant N_0$. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $0 \leqslant k < 1$?

4. On suppose que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant K.|u_n - \ell|^2$$

où $K > 0$.

4.a En déduire une estimation de $|u_n - \ell|$ pour $n \geqslant N_0$. Cette estimation prouve-t-elle que la suite converge ?

4.b On suppose en outre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Comment l'estimation de $|u_n - \ell|$ peut-elle être modifiée pour n assez grand ?

33. On choisit $0 < u_0 < 1$ et on suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Elle tend vers 0.

34. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

35. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}.$$

(On discutera sur le signe de $u_0 - 3$.)

36. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in [0, 6]$ et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}.$$

On vérifiera en particulier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{|u_n - 2|}{2}.$$

37. On pose $u_0 > 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ell\text{n}(1 + u_n).$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.

38. On pose $u_0 = 1$.

38.1 On suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? (Elle est constante !)

38.2 On suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}.$$

Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

39. Bac E 1985 Aix

On considère la fonction f définie par

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{5}$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1/2$ et la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1.
$$\forall\, t \in [0, 1], \quad |f'(t)| \leqslant 1/2$$

2. Il existe un, et un seul, réel $0 < t_0 < 1$ tel que $f(t_0) = t_0$.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers t_0.

40. Bac C 1985 Amiens

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{au_n}.$$

1. Étudier la fonction f définie par

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{\ell\text{n}\, x}{x}.$$

Discuter les solutions de l'équation

$$e^{ax} - x = 0$$

en fonction de a.

2. On suppose que $a < 0$. Alors les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont de monotonies contraires. De plus,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leqslant 1.$$

Donc...

3. On suppose que $-1 < a < 0$. Alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant |a|^n.|u_1 - u_0|.$$

Et donc...

41. Bac C 1985 Besançon

On considère la fonction

$$f = [x \mapsto 1 + \ell\text{n}(1 + x)]$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Il existe un, et un seul, réel $q > 0$ tel que $f(q) = q$ et de plus $2 < q < 3$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par q.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$q - u_n \leqslant \frac{q - u_0}{3^n}.$$

Et donc...

42. Bac E 1985 Bordeaux

On considère la fonction

$$f = \left[x \mapsto \ell\text{n}(1 + e^{-x})\right]$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1.
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leqslant 1/2$$

2. L'équation $x = f(x)$ admet une, et une seule, solution réelle :

$$\ell = \ell\text{n}\, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

3. Pour tout $n \geqslant 1$, le terme u_n est strictement positif et

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \ell|.$$

Donc...

43. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}$$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = {}^{u_n^2}/_4.$$

2.a Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$1 \leqslant v_{k+1} - v_k \leqslant 1 + \frac{1}{4k}.$$

2.b En comparant une somme et une intégrale, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad n \leqslant v_n \leqslant n + \frac{\ell n(n-1)}{4} + v_2.$$

2.c En déduire un équivalent de u_n.

V

Suites définies implicitement

44. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n + x - 1.$$

1. Pour tout $n \geqslant 2$, il existe un unique réel positif x tel que $f_n(x) = 0$. Ce réel sera noté u_n.
2. Pour tout $n \geqslant 2$,

$$0 < u_n < u_{n+1} < 1$$

et la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1 (par l'absurde).

3. En particulier, u_n^n tend vers 0 et donc

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1 - u_n).$$

45. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n, l'unique réel positif x tel que

$$x^n + nx = 1.$$

NB : la monotonie de la suite semble difficilé à étudier.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $0 < u_n < {}^1/_n$ d'où

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

2. Plus précisément,

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant u_n^n \leqslant \frac{1}{n^n}$$

donc

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{u_n^n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^{n+1}}\Big).$$

VI

Suites complexes

46. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de nombres complexes non nuls qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. La suite de terme général $\operatorname{Arg} u_n$ converge-t-elle ?