> *Soient A et B, deux matrices carrées de taille n. Démontrer que les polynômes caractéristiques de AB et de BA sont égaux.*
> *Indication : Si le rang de B est égal à $0 \leqslant r \leqslant n$, alors il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $B = PJ_rQ$.*

❧ Si B est inversible, alors

$$BA = B(AB)B^{-1}$$

donc BA et AB sont semblables et ont donc même polynôme caractéristique.

❧ On pose $A' = QAP$ de telle sorte que

$$AB = (Q^{-1}A'P^{-1})(PJ_rQ) = Q^{-1}(A'J_r)Q.$$

Comme deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, alors AB et $A'J_r$ ont même polynôme caractéristique.

En décomposant A' en blocs sur le modèle de la matrice J_r,

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$
$$A'J_r = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ M_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_rA' = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \det(A'J_r - tI_n) &= \begin{vmatrix} M_1 - tI_r & 0 \\ M_3 & -tI_{n-r} \end{vmatrix} \\ &= \det(M_1 - tI_r)\det(-tI_{n-r}) \\ &= \begin{vmatrix} M_1 - tI_r & M_2 \\ 0 & -tI_{n-r} \end{vmatrix} \\ &= \det(J_rA' - tI_n). \end{aligned}$$

Par conséquent, $A'J_r$ et J_rA' ont même polynôme caractéristique.

Les matrices J_rA' et $PJ_rA'P^{-1}$ sont semblables et

$$PJ_rA'P^{-1} = (PJ_rQ)(Q^{-1}A'P^{-1}) = BA,$$

donc J_rA' et BA ont même polynôme caractéristique.

On a ainsi démontré que les matrices AB et BA avaient même polynôme caractéristiques.

✍ *En particulier, ces deux matrices ont même spectre et mêmes sous-espaces caractéristiques. En reprenant les calculs précédents et en raisonnant sur le rang des différentes matrices, on démontre que*

$$\forall\, t \in \mathbb{K}^*, \quad \mathrm{rg}(AB - tI_n) = \mathrm{rg}(BA - tI_n).$$

Par conséquent, les sous-espaces propres de AB et de BA associés à une valeur propre non nulle *sont deux à deux isomorphes.*

Si on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors $AB = 0_2$ tandis que $BA = 2A \neq 0_2$, donc $\mathrm{rg}(AB) \neq \mathrm{rg}(BA)$ et les noyaux des deux matrices ne sont pas isomorphes. Cependant, on a bien $\chi_{AB} = \chi_{BA} = X^2$ (la matrice BA est nilpotente d'indice 2).