Composition de Mathématiques

Le 20 décembre 2023 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

Une entreprise logistique dispose de vingt entrepôts, numérotés de 1 à 20, et chaque entrepôt dispose de plusieurs camions de livraison.
Le territoire couvert par l'entreprise est découpé en trente zones de livraison, numérotées de 1 à 30, et chaque entrepôt peut effectuer des livraisons dans trois zones.
Ces données sont enregistrées dans une base de données contenant trois tables.
La table `livraison` *est constituée des champs suivants.*

- `date_liv` *: date de la livraison au format "jj-mm-aaaa" (chaîne de caractères) ;*
- `heure` *: heure de la livraison au format "hh-mm-ss" (chaîne de caractères) ;*
- `id_client` *: identifiant du client (entier) ;*
- `id_local` *: identifiant de l'entrepôt (entier compris entre 1 et 20).*

La table `client` *est constituée des champs suivants.*

- `id` *: identifiant du client (entier) ;*
- `zone_liv` *: entier compris entre 1 et 30.*

La table `local` *est constituée des champs suivants.*

- `id` *: identifiant de l'entrepôt (entier compris entre 1 et 20) ;*
- `zone1` *: entier ;*
- `zone2` *: entier ;*
- `zone3` *: entier.*

1. Donner une clé primaire pour la table `livraison`.
2. Écrire une requête SQL permettant d'obtenir les identifiants des clients livrés le 10 janvier 2021.
3. Écrire une requête SQL permettant d'obtenir les heures des livraisons effectuées dans la zone 5 le 2 mars 2021.
4. Écrire une requête SQL comptant le nombre de livraisons effectuées le 3 février 2021 par des camions attachés à des entrepôts qui ne livrent que dans des zones dont le numéro est inférieur ou égal à 10.

❖ II – Problème ❖

On considère la fonction f définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(t) = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

1. Démontrer que f est intégrable sur $I =]0, +\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction u_n par

$$\forall\, t \in I, \quad u_n(t) = te^{-nt}.$$

2. a. Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur I.
2. b. La série de fonctions $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur I ?
3. Au moyen d'un théorème d'intégration terme à terme, calculer l'intégrale suivante.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{e^t - 1}$$

On rappelle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

❖ III – Problème ❖

Dans tout le problème, on considère une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in]-1, 1[$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad f_n(x) = a_n \frac{x^n}{1-x^n}$$

et on étudie la série de fonctions $\sum f_n$ dont la somme sera notée S.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$$

1. Soit $x \in]-1, 1[$.
1. a. Donner un équivalent de $1 - x^n$ pour $n \to +\infty$.
1. b. Démontrer que la série $\sum f_n(x)$ converge absolument.
2. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $[-b, b]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.
3. a. Démontrer que la somme S est une fonction continue sur $]-1, 1[$.

3. b. Démontrer que la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$. Préciser la valeur de $S'(0)$.

On peut démontrer que la somme S est développable en série entière sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$: pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$$

où on a posé

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \sum_{d|n} a_d.$$

(On rappelle que la notation $d \mid n$ signifie que l'entier d est un diviseur de l'entier n.)

4. Écrire une fonction `a2b(a)` dont l'argument est une liste qui contient les premiers termes de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et qui retourne les premiers termes de la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$.

Estimer la complexité de la fonction `a2b`.

Dans la suite du problème, on suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = (-1)^n.$$

5. a. Au moyen d'une intégration terme à terme, démontrer que

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad \ell n(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n.$$

5. b. En utilisant le Théorème de la double limite, calculer la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

6. a. En utilisant le Théorème de la double limite, calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{S(x)}{x}$$

et donner un équivalent de $S(x)$ au voisinage de 0.

6. b. Retrouver ainsi la valeur de $S'(0)$ calculée au **[3.b.]**.

6. c. Démontrer que

$$S(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{-\ell n 2}{1-x}.$$

☞ *On pourra remarquer que*

$$\forall\, x \in]0,1[, \quad \frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+\cdots+x^{n-1}}.$$

7. La fonction S est-elle intégrable sur $[0,1[$? Admet-elle des primitives sur $[0,1[$?

Les deux énoncés suivants abordent le même problème : la réduction simultanée de deux endomorphismes en dimension trois.

Le premier énoncé est très calculatoire, le second est sensiblement plus abstrait (et moins guidé).

Un seul de ces deux problèmes doit être traité.

❖ IV – Problème ❖

On considère les endomorphismes f et g de $E = \mathbb{R}^3$ représentés dans la base canonique par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 4 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Leurs polynômes minimaux respectifs seront notés μ_A et μ_B et leurs polynômes caractéristiques seront notés χ_A et χ_B.
On considère également les matrices

$$\Pi_{-2} = -(A + I_3) \quad \text{et} \quad \Pi_{-1} = (A + 2I_3)$$

en notant π_1 et π_2, les endomorphismes de E représentés dans la base canonique de E par ces deux matrices.

Partie A. Réduction de A

1. a. Vérifier que $\operatorname{Ker} \pi_{-1}$ est un plan et donner une équation cartésienne de ce plan.

1. b. Vérifier que $\operatorname{Ker} \pi_{-2}$ est une droite. Donner un vecteur directeur de cette droite.

1. c. Comparer $\operatorname{Ker} \pi_{-2}$ et $\operatorname{Im} \pi_{-1}$, puis $\operatorname{Ker} \pi_{-1}$ et $\operatorname{Im} \pi_{-2}$.

2. Démontrer que

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f + 2I_E) \oplus \operatorname{Ker}(f + I_E).$$

En déduire que $\mu_A = (X+1)(X+2)$, puis que

$$\chi_A = (X+2)^2(X+1).$$

3. La matrice A est-elle inversible ?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer le reste R_n de la division euclidienne de X^n par μ_A. En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (-1)^n \Pi_{-1} + (-2)^n \Pi_{-2}.$$

Partie B. Une matrice nilpotente

On pose $N = B - A$ et on note φ, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice N dans la base canonique.

5. Démontrer que le noyau de φ est un plan. Donner une équation cartésienne de ce plan.

6. En déduire que

$$\operatorname{Im} \varphi \subset \operatorname{Ker} \varphi$$

puis que $N^2 = 0_3$.

Partie C. Réduction de B

7. Démontrer que -1 et -2 sont des valeurs propres de B et donner une base de chaque sous-espace propre.

8. Démontrer que

$$\chi_B = \mu_B = (X+1)(X+2)^2.$$

9. Vérifier que

$$\Pi_{-1} = (B+2I_3)^2 \quad \text{et que} \quad \Pi_{-2} = -(B+I_3)(B+3I_3).$$

En déduire que

$$\operatorname{Ker}(g+2I_3)^2 = \operatorname{Ker}(f+2I_3),$$
$$\operatorname{Ker}(g+I_3) = \operatorname{Ker}(f+I_3)$$

et que

$$N = -(B+I_3)(B+2I_3).$$

10. Démontrer que A et N commutent. En déduire que

$$B^n = (-1)^n\Pi_{-1} + (-2)^n\Pi_{-2} + n(-2)^{n-1}N$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

Partie D. Réduction simultanée

11. Donner un vecteur ε_3 qui dirige la droite vectorielle $\operatorname{Ker}(g+I_E)$.

12. Donner un vecteur ε_2 qui appartient au sous-espace $\operatorname{Ker}(g+2I_E)^2$ sans appartenir au sous-espace $\operatorname{Ker}(g+2I_E)$.

13. On pose alors

$$\varepsilon_1 = (g+2I_E)(\varepsilon_2).$$

Démontrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\operatorname{Ker}(g+2I_E)^2$.

14. Démontrer que

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

15. Calculer les matrices qui représentent f, g et φ dans cette base.

❖ V – Problème ❖

Dans tout le problème, on considère un espace vectoriel E *de dimension* 3 *sur le corps* $\mathbb{K}$. *On considère deux endomorphismes* f *et* g *de* E *qui commutent :*

$$f \circ g = g \circ f.$$

On suppose que ces deux endomorphismes ont même polynôme caractéristique et que ce polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ *: il existe deux scalaires distincts* α *et* β *dans* $\mathbb{K}$ *tels que*

$$\begin{aligned} \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi(\lambda) &= \det(\lambda\, I_E - f) \\ &= \det(\lambda\, I_E - g) \\ &= (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta). \end{aligned}$$

On suppose cependant que les polynômes minimaux de ces deux endomorphismes sont distincts :

$$\mu_f = (X-\alpha)(X-\beta), \quad \mu_g = \chi = (X-\alpha)^2(X-\beta).$$

Enfin, on pose

$$h = g - f \in L(E).$$

Partie A. Étude d'un endomorphisme nilpotent

Dans cette partie, on considère un endomorphisme

$$\varphi \in L(E)$$

qu'on suppose nilpotent d'indice 2 *:*

$$\varphi \neq \omega_E, \quad \varphi^2 = \omega_E.$$

1. Démontrer qu'il existe un vecteur $e_3 \neq 0_E$ tel que

$$E = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \mathbb{K}\cdot e_3.$$

2. On pose

$$e_2 = \varphi(e_3).$$

Démontrer que

$$\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{K}\cdot e_2 \quad \text{et que} \quad e_2 \in \operatorname{Ker}\varphi.$$

3. Démontrer qu'il existe un vecteur e_1 tel que

$$\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(e_1, e_2).$$

4. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Existe-t-il une base $\mathscr{B}_1$ de E telle que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

6. Existe-t-il une base $\mathscr{B}_2$ de E telle que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

Partie B. Interpolation polynomiale

Soient λ et μ, deux scalaires distincts. On considère l'application
$$\Phi\ :\ \mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}^3$$
définie par
$$\forall\, P \in \mathbb{K}_2[X], \quad \Phi(P) = \big(P(\lambda), P'(\lambda), P(\mu)\big).$$

7. Démontrer que l'application Φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ sur $\mathbb{K}^3$.

8. Expliciter les polynômes Q_0, Q_1 et Q_2 tels que
$$\Phi(Q_0) = (1,0,0),$$
$$\Phi(Q_1) = (0,1,0),$$
$$\Phi(Q_2) = (0,0,1).$$

☞ *On pourra chercher Q_0 sous la forme*
$$Q_0 = (X-\mu)\big[a + b(X-\lambda)\big].$$

Démontrer que (Q_0, Q_1, Q_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

9. Démontrer qu'il existe un, et un seul, polynôme
$$P \in \mathbb{K}_2[X]$$
tel que
$$P(\lambda) = \alpha, \quad P'(\lambda) = 1, \quad P(\mu) = \beta.$$
Exprimer ce polynôme P au moyen des polynômes Q_0, Q_1 et Q_2.

Partie C. Réduction simultanée

10. Démontrer qu'il existe deux sous-espaces F et G de E qui sont des sous-espaces propres pour l'endomorphisme f et qui vérifient les propriétés suivantes.
$$E = F \oplus G, \quad \dim F = 2, \quad \dim G = 1$$

11. Démontrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont stables par g.

12. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}_1$ de E telle que
$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1}(g) = \begin{pmatrix} \alpha & \star & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$
où $\star$ désigne un scalaire non nul de $\mathbb{K}$.

13. Démontrer que $g - f$ est nilpotent d'indice 2. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}_0$ de E telle que
$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(g) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

14. L'endomorphisme g appartient-il à l'algèbre $\mathbb{K}[f]$ des polynômes en f ?

15. Démontrer que
$$f \in \mathbb{K}[g] = \mathrm{Vect}(I_E, g, g^2).$$

16. a. Démontrer qu'il existe trois endomorphismes π_1, π_2 et π_3 dans $\mathbb{K}[g]$ tels que
$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\pi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\pi_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\pi_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. b. Démontrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad g^n = \alpha^n \pi_1 + n\alpha^{n-1}\pi_2 + \beta^n \pi_3.$$

17. On munit l'espace vectoriel E d'une norme $\|\cdot\|$ et on note $|||\cdot|||$, la norme sur $L(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

Démontrer que
$$\lim_{n \to +\infty} |||g^n||| = 0$$
si, et seulement si, $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$.

Solution I ❀ Rendement d'une entreprise logistique

1. Il n'y a pas d'identifiant unique pour les livraisons. Il faut donc combiner certains champs pour caractériser une livraison : en admettant qu'il ne peut y avoir deux livraisons simultanées chez un même client, on peut considérer que le triplet

(`date_liv`, `heure`, `id_client`)

est une clé primaire pour la table `livraison`.

2. Les informations nécessaires se trouvent toutes dans la table `livraison`.

```
SELECT id_client FROM livraison
WHERE date_liv = "10-01-2021"
```

3. La date et l'heure se trouvent dans la table `livraison` alors que la zone de livraison se trouve dans la table `client`. Il faut donc réaliser une jointure — en se servant de l'identifiant du client (what else ?).

Comme d'habitude, quand on utilise plusieurs tables, il est judicieux d'utiliser un alias pour faciliter la lecture (et l'écriture) de la requête.

```
SELECT L.heure FROM livraison AS L
JOIN client AS C ON L.id_client=C.id
WHERE L.date_liv = "02-03-2021"
      AND C.zone_liv = 5
```

4. Les dates des livraisons se trouvent dans la table `livraison` alors que les zones rattachées aux différents entrepôts se trouvent dans la table `local`. Ce sont ces deux tables qu'il faut maintenant croiser, en utilisant cette fois l'identifiant de l'entrepôt.

```
SELECT COUNT(*) FROM livraison AS L
JOIN LOCAL AS Loc ON L.id_local = Loc.id
WHERE L.date_liv = "03-02-2021"
      AND Loc.zone1<=10
      AND Loc.zone2<=10
      AND Loc.zone3<=10
```

> *L'indentation ne sert qu'à faciliter la lecture. Ce qui est essentiel, bien entendu !*

Solution II ❀ Calcul d'une intégrale

1. Il est clair que l'application f est continue sur l'intervalle I. Lorsque t tend vers 0,

$$f(t) \sim \frac{t \times 1}{t},$$

donc f tend vers une limite finie, égale à 1, au voisinage de 0. Elle est donc intégrable au voisinage de 0.

Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$f(t) \sim \frac{te^{-t}}{1} = te^{-t/2} \cdot e^{-t/2} = o(e^{-t/2}).$$

Comme la fonction $\left[t \mapsto e^{-t/2}\right]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit que la fonction f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

La fonction f est donc intégrable sur I.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que

$$\forall\, t \in I, \quad u_n'(t) = (1 - nt)e^{-nt}.$$

Par conséquent, la fonction u_n est croissante sur $]0, 1/n]$ et décroissante sur $[1/n, +\infty[$. Comme la fonction u_n est *positive* sur I, on en déduit que

$$\|u_n\|_\infty = \max_{x>0} u_n(x) = u_n(1/n) = \frac{1}{ne}.$$

Or la série $\sum \frac{1}{ne}$ est divergente. Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur I.

2. b. Pour tout $t \in I$, la série $\sum u_n(t)$ peut être vue comme une série géométrique de raison $0 < e^{-t} < 1$:

$$u_n = t \cdot (e^{-t})^n.$$

Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I et le reste d'ordre n est bien défini :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I, \quad R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t) = \frac{te^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $t_n = 1/n$ appartient à l'intervalle I et

$$R_n(1/n) = \frac{e^{-(n+1)/n}}{n(1 - e^{-1/n})} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-1} \neq 0.$$

Cela prouve que la suite de fonctions $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I vers la fonction nulle et donc que la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur I.

3. On remarque que

$$\forall\, t \in I, \quad \frac{t}{e^t - 1} = f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t).$$

Comme les fonctions u_n sont positives,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in I, \quad 0 \leqslant u_n(t) \leqslant f(t).$$

Comme f est intégrable sur I et que les fonctions u_n sont continues sur I, les fonctions u_n sont donc toutes intégrables sur I.

Ainsi, $\sum u_n$ est une série de fonctions intégrables sur l'intervalle I, qui converge simplement sur I et la somme f de cette série de fonctions est continue sur I.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left|u_n(t)\right| dt &= \int_0^{+\infty} te^{-nt}\, dt \\
&= \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} (nt)e^{-(nt)} \cdot n\, dt \\
&= \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx = \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

(intégration par parties ou connaissance de la fonction Γ). Cela prouve que la série

$$\sum \int_0^{+\infty} \left|u_n(t)\right| dt$$

est convergente. On peut donc appliquer le Théorème d'intégration terme à terme, qui nous donne en particulier

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{e^t - 1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Solution III ❀ Séries de Lambert

1. a. Comme $|x| < 1$, la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc $1 - x^n = 1 + o(1)$ et donc $1 - x^n \sim 1$ lorsque $n \to +\infty$.

1. b. D'après la question précédente, pour $x \in]-1, 1[$,

$$f_n(x) = a_n \frac{x^n}{1 - x^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n x^n.$$

Comme $|x| < 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ est *absolument* convergente (par hypothèse). D'après le Théorème de comparaison pour les séries *absolument* convergentes, on en déduit que la série $\sum f_n(x)$ converge absolument pour tout $x \in]-1, 1[$.

> *Pour une série réelle ou complexe, la convergence absolue entraîne la convergence. Par conséquent, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ (au moins).*

2. Soit $0 < b < 1$. Pour tout $x \in [-b, b]$, on a $|x^n| \leqslant b^n$ et, par inégalité triangulaire,

$$|1 - x^n| \geqslant 1 - b^n > 0.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall\, x \in [-b, b], \quad \left|f_n(x)\right| \leqslant |a_n| \cdot \frac{b^n}{1 - b^n} = \left|f_n(b)\right|.$$

On a trouvé un majorant indépendant de x et, par **[1.b.]**, la série réelle $\sum f_n(b)$ converge absolument, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-b, b]$.

Comme la convergence normale entraîne la convergence uniforme, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $[-b, b]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

> *La série de fonctions $\sum f_n$* n'est pas *une série entière, il serait déplacé d'appliquer ici un théorème de convergence qu'on n'a établi que pour les séries entières.*

3. a. Il s'agit de démontrer que la somme S est continue en chaque point $x_0 \in]-1, 1[$.

❧ Soit $x_0 \in]-1, 1[$. Il existe donc un réel b tel que

$$|x_0| < b < 1.$$

D'après la question précédente, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-b, b]$. Or les fonctions f_n sont toutes continues sur $]-1, 1[$ et, en particulier, continues sur $[-b, b]$. Donc la somme S de la série de fonctions est continue sur $[-b, b]$ et, en particulier, elle est continue au point x_0.

Ainsi, la somme S est continue sur $]-1, 1[$.

3. b. Les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in]-1, 1[, \quad f_n'(x) = \frac{n a_n x^{n-1}}{(1 - x^n)^2}.$$

Pour chaque $0 < b < 1$, on en déduit que

$$\forall\, x \in [-b, b], \quad \left|f_n'(x)\right| \leqslant \frac{n a_n b^{n-1}}{(1 - b^n)^2} = \left|f_n'(b)\right|.$$

On a trouvé un majorant indépendant de x, il reste à vérifier que ce majorant est le terme général d'une série convergente.

Comme $0 < b < 1$,

$$\frac{n a_n b^{n-1}}{(1 - b^n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n a_n b^{n-1}.$$

Par hypothèse, pour $b < \beta < 1$, la série $\sum a_n \beta^n$ converge absolument. Or

$$n a_n b^{n-1} = b\left(\frac{b}{\beta}\right)^{n-1} \cdot \beta \cdot a_n \beta^n \underset{n\to+\infty}{=} o(a_n \beta^n),$$

donc la série $\sum n a_n b^{n-1}$ converge absolument.

> *Le cours sur les séries entières permet de gagner un peu de temps : par hypothèse, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est supérieur à 1 ; donc le rayon de convergence de la série dérivée $\sum n a_n t^{n-1}$ est lui aussi supérieur à 1, ce qui prouve que la série $\sum n a_n b^{n-1}$ converge absolument pour tout $|b| < 1$.*

Par comparaison de séries *absolument* convergentes, la série $\sum |f_n'(b)|$ est convergente et cela démontre que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment $[-b, b] \subset]-1, 1[$.

Résumons : la série $\sum f_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$; cette série converge normalement sur tout segment de $]-1, 1[$; la série dérivée $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment de $]-1, 1[$. Donc la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x).$$

❧ En particulier,

$$S'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n a_n \cdot 0^{n-1}}{(1 - 0^n)^2} = a_1.$$

4. Le plus simple, de mon point de vue, consiste à aligner les indices mathématiques et les indices informatiques, en insérant un coefficient fictif en tête de l'argument, c'est-à-dire à remplacer

$$(a_1, \ldots, a_N) \quad \text{par} \quad (a_0, a_1, \ldots, a_N).$$

On peut alors manier les indices en étant sûr de ne pas se tromper.

```
def a2b(a):
   a = [0]+a
   NN = len(a)            # NN = (N+1)
   b = []
   for n in range(1,NN): # Pour 1 ⩽ n < N+1
      b_n = 0
      for d in range(1,n+1): # Pour 1 ⩽ d ⩽ n,
         if (n%d==0):        # si d divise n...
            b_n += a[d]
         b.append(b_n)
   return b              # renvoie (b_1,...,b_N)
```

❧ Pour chaque entier $1 \leqslant n \leqslant N$, on effectue entre n et $2n$ opérations (n tests et au plus n additions), donc le nombre total d'opérations est de l'ordre de

$$1+2+\cdots+N = \frac{N(N+1)}{2}.$$

La complexité est donc quadratique (mais chaque opération est très peu coûteuse en temps de calcul).

5. Il est clair que la série $\sum(-1)^n x^n$ converge absolument pour tout $|x|<1$. L'hypothèse générale faite au début du problème est donc validée.

> *Ce n'est pas parce que l'énoncé ne le demande pas explicitement qu'il ne faut pas faire cette vérification simple !*

5. a. D'après le Théorème fondamental de l'Analyse,

$$\forall\, x \in\,]-1,1[,\quad \ell n(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}.$$

Pour $|x|<1$, il est clair que le segment $[0 \leftrightarrow x]$ est contenu dans l'intervalle ouvert $]-1,1[$ et donc, en reconnaissant une somme géométrique,

$$\forall\, t \in [0 \leftrightarrow x],\quad \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n.$$

Comme $|x|<1$, la série (géométrique) $\sum |x|^n$ est convergente et comme

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0 \leftrightarrow x],\quad \left|(-1)^n t^n\right| \leqslant |x|^n,$$

la série de fonctions $\sum(-1)^n t^n$ converge <u>normalement</u> sur le <u>segment</u> $[0 \leftrightarrow x]$. On peut donc intégrer terme à terme :

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^x t^n\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

En décalant les indices, on en déduit que

$$\forall\, x \in\,]-1,1[,\quad \ell n(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n.$$

> *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
>
> $$\sup_{t\in[0,1]} \left|(-1)^n t^n\right| = 1.$$
>
> *Comme la série $\sum 1$ diverge (grossièrement), la série entière $\sum(-1)^n t^n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$. On ne peut donc pas étendre le raisonnement précédent au cas $x=1$.*

5. b. D'après **[5.a.]**,

$$\forall\, x \in\,]-1,1[,\quad \ell n(1+x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n x^n}{n}}_{u_n(x)}.$$

Il est clair que

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad u_n(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{(-1)^n}{n}.$$

❧ D'après le Théorème de la double limite (dit aussi *Théorème d'interversion des limites*), il suffit donc que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur un voisinage de 1 pour que

$$\ell n\, 2 = \lim_{x\to 1} \ell n(1+x) = \lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to 1} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

❧ Prenons l'intervalle $]0,1[$ pour voisinage (à gauche) de 1. Sur cet intervalle, il est clair que la série $\sum u_n(x)$ est alternée et que la suite de terme général x^n/n tend vers 0 en décroissant lorsque n tend vers $+\infty$. On peut donc invoquer le Critère spécial des séries alternées :

$$\forall\, N \geqslant 1,\ \forall\, x \in\,]0,1[,\quad \left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x)\right| \leqslant \left|u_N(x)\right| \leqslant \frac{1}{N}.$$

Le majorant trouvé est indépendant de x et tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite des restes converge uniformément sur $]0,1[$ vers la fonction nulle et donc que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $]0,1[$.

❧ Pour les raisons qu'on a exposées plus haut,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\,\ell n\, 2.$$

> *On pourrait aller plus vite avec la théorie des séries entières. En effet, le Théorème d'Abel nous assure que : si la série $\sum a_n R^n$ est convergente, alors*
>
> $$\lim_{x \overset{<}{\to} R} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$
>
> *(La démonstration que nous avons donnée est une démonstration de ce théorème dans un cas particulier.)*

6. a. Pour $0<x<1$,

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n x^{n-1}}{1-x^n}}_{u_n(x)}.$$

Il est clair que

$$u_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \left|\begin{array}{ll} -1 & \text{si } n=1, \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2. \end{array}\right.$$

D'autre part, pour un réel $0 < b < 1$ (par exemple $b = \pi/6$),

$$\forall\, x \in [-b, b], \quad \left|u_n(x)\right| \leqslant \frac{b^{n-1}}{1-b^n}.$$

Le majorant est indépendant de x et, comme $0 < b < 1$, il est équivalent à b^{n-1}, ce qui prouve que la série des majorants est convergente et donc que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[-b, b]$ (qui est un voisinage de 0).

D'après le Théorème de la double limite, le quotient $S(x)/x$ tend donc vers une limite finie au voisinage de 0 et

$$\lim_{x\to 0} \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to 0} u_n(x) = -1.$$

On en déduit évidemment que $S(x) \sim -x$ lorsque x tend vers 0.

6. b. Comme $S(0) = 0$, on déduit de la question précédente que

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{S(x) - S(0)}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{} S'(0) = -1.$$

D'après **[3.b.]**, $S'(0) = a_1 = -1$: les deux résultats sont cohérents.

6. c. Pour $0 < x < 1$,

$$(1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{x^n(1-x)}{1-x^n}}_{u_n(x)}.$$

Comme $0 < x < 1$, il est clair que $0 < 1-x < 1$ et que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 < x^{n+1} < x^n \quad \text{et} \quad 0 < 1 - x^n < 1 - x^{n+1}.$$

On en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 < \left|u_{n+1}(x)\right| < \left|u_n(x)\right|$$

et donc qu'on peut appliquer le Critère spécial des séries alternées à la série $\sum u_n(x)$.

En particulier, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\forall\, x \in \left]0, 1\right[, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \left|u_n(x)\right| = \frac{|x|^n(1-x)}{1-x^n}.$$

D'après la formule de la somme géométrique,

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^{n-1} \geqslant nx^{n-1} > 0$$

donc

$$\forall\, x \in \left]0, 1\right[, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \frac{x^n}{nx^{n-1}} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Le majorant trouvé est indépendant de $x \in \left]0, 1\right[$ et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\left]0, 1\right[$, qui est un voisinage (à gauche) de 1.

Or, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n(x) = (-1)^n \cdot x^n \cdot \frac{1-x}{1-x^n} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{(-1)^n}{n}$$

(encore la formule de la somme géométrique !). On peut alors invoquer le Théorème de la double limite : l'expression $(1-x)S(x)$ tend vers une limite finie au voisinage de 1 et

$$\lim_{x\to 1} (1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to 1} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

D'après **[5.b.]**,

$$\lim_{x\to 1} (1-x)S(x) = -\ln 2$$

et donc finalement

$$S(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{-\ln 2}{1-x}.$$

7. La fonction S est bien continue sur l'intervalle $[0, 1[$ **[3.a.]**. D'après le Théorème fondamental de l'Analyse, elle admet donc des primitives sur cet intervalle.

Mais la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{1}{1-x}\right]$$

n'est pas intégrable au voisinage de 1 (fonction de référence), donc on déduit de **[6.c.]** que la fonction S n'est pas intégrable sur $[0, 1[$.

Solution IV ❀ Réduction simultanée

Partie A. Réduction de A

1. a. Il est clair que le rang de la matrice

$$\Pi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

est égal à 1 (la matrice n'est pas nulle et ses trois colonnes sont proportionnelles), donc la dimension de $\operatorname{Ker} \pi_{-1}$ est égale à 2 (Théorème du rang).

Chaque ligne non nulle de la matrice donne également une équation cartésienne du noyau.

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} \pi_{-1} \iff x - 4y - 3z = 0$$

1. b. Le rang de la matrice

$$\Pi_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

est égal à 2 (les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles, les deux dernières sont égales), donc la dimension de $\operatorname{Ker} \pi_{-2}$ est égale à 1 (Théorème du rang).

La relation $C_2 - C_3 = 0$ montre que le vecteur $(0, 1, -1)$ appartient au noyau de π_{-2} et comme ce noyau est une droite, on connaît ainsi un vecteur directeur.

$$\operatorname{Ker} \pi_{-2} = \mathbb{R} \cdot (0, 1, -1)$$

1. c. D'après les questions précédentes et le Théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker} \pi_{-2} = \dim \operatorname{Im} \pi_{-1} = 1,$$
$$\dim \operatorname{Ker} \pi_{-1} = \dim \operatorname{Im} \pi_{-2} = 2.$$

L'image d'une matrice est engendrée par ses colonnes. Il est donc clair que l'image de π_{-1} est la droite dirigée par le vecteur $(0, 1, -1)$ et donc que

$$\operatorname{Im} \pi_{-1} = \operatorname{Ker} \pi_{-2}.$$

De même, l'image de π_{-2} est engendrée par les vecteurs $(1, 1, -1)$ et $(0, -3, 4)$. Il est clair que ces deux vecteurs vérifient l'équation cartésienne du plan $\operatorname{Ker} \pi_{-1}$, donc l'image de π_{-2} est un sous-espace de $\operatorname{Ker} \pi_{-1}$. Ces deux sous-espaces vectoriels ayant même dimension, on en déduit que

$$\operatorname{Im} \pi_{-2} = \operatorname{Ker} \pi_{-1}.$$

2. Le facteur -1 ne changeant rien, on sait que

$$\operatorname{Ker}(f + 2\,I_E) = \operatorname{Ker} \pi_{-1} \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker}(f + I_E) = \operatorname{Ker} \pi_{-2}.$$

D'après **[1.a.]** et **[1.b.]**, la droite vectorielle $\operatorname{Ker}(f + I_E)$ est dirigée par un vecteur qui n'appartient pas au plan vectoriel $\operatorname{Ker}(f+2\,I_E)$ (les coordonnées de ce vecteur ne vérifient pas l'équation cartésienne du plan). Comme $\dim E = 3$, on en déduit que les deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E :

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f + 2\,I_E) \oplus \operatorname{Ker}(f + I_E).$$

❧ On a ainsi démontré que f admettait deux valeurs propres : -1 et -2 et que la somme (nécessairement directe!) des deux sous-espaces propres était égale à E. Par conséquent, l'endomorphisme f est diagonalisable et n'a pas d'autre valeur propre.

$$\operatorname{Sp}(f) = \{-2\,;\,-1\}$$

Comme f est diagonalisable, son polynôme minimal μ_A est unitaire, scindé, à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de f, donc

$$\mu_A = (X + 2)(X + 1).$$

❧ Comme f est diagonalisable, son polynôme caractéristique χ_A est unitaire, scindé, ses racines sont les valeurs propres de f et leurs multiplicités respectives sont les dimensions des sous-espaces propres qui leur sont associés. Donc

$$\chi_A = (X + 2)^2(X + 1).$$

3. Le scalaire 0 n'est pas une valeur propre de f, donc l'endomorphisme f est inversible et sa matrice A est inversible.

4. Le degré du polynôme μ_A est égal à 2, donc ce polynôme n'est pas nul et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (Q_n, R_n) de polynômes tels que

$$X^n = (X + 2)(X + 1)Q_n + R_n \quad \text{et} \quad \deg R_n < 2.$$

Il existe donc deux réels a_n et b_n tels que

$$R_n = a_n X + b_n.$$

En substituant -2 et -1 à X dans la division euclidienne, on obtient le système

$$\begin{cases} -2a_n + b_n = (-2)^n \\ -a_n + b_n = (-1)^n \end{cases}$$

dont la solution est

$$(a_n, b_n) = \big((-1)^n - (-2)^n,\ 2(-1)^n - (-2)^n\big).$$

❧ En substituant la matrice A à X dans la division euclidienne, on obtient

$$A^n = a_n A + b_n I_3$$

(puisque $\mu_A(A) = 0_3$). Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= \big((-1)^n - (-2)^n\big)A + \big(2(-1)^n - (-2)^n\big)I_3 \\ &= (-1)^n(A + 2I_3) - (-2)^n(A + I_3) \\ &= (-1)^n\Pi_{-1} + (-2)^n\Pi_{-2}. \end{aligned}$$

Partie B. Une matrice nilpotente

5. Le rang de la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

est évidemment égal à 1 et la dimension de E est égale à 3, donc le noyau de φ est un plan (Théorème du rang). Chaque ligne de la matrice donne une équation cartésienne du noyau :

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} \varphi \iff x - y - z = 0.$$

6. L'image d'une matrice est engendrée par ses colonnes. Par conséquent,

$$\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R} \cdot (1, -2, 3).$$

Comme les coordonnées du vecteur directeur $(1, -2, 3)$ vérifient l'équation cartésienne du plan $\operatorname{Ker} \varphi$, on en déduit que

$$\operatorname{Im} \varphi \subset \operatorname{Ker} \varphi.$$

❧ Pour tout vecteur $u \in E$,

$$\varphi^2(u) = \varphi\big(\varphi(u)\big) = 0_E$$

puisque $\varphi(u) \in \operatorname{Im} \varphi \subset \operatorname{Ker} \varphi$. Ainsi $\varphi^2 = \omega_E$ et $N^2 = 0_3$.

> *Comme $\varphi \neq \omega_E$ et que $\varphi^2 = \omega_E$, l'endomorphisme φ est nilpotent d'indice 2.*

Partie C. Réduction de B

7. Il est clair que le rang de la matrice

$$B-(-1)I_3 = B+I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & 5 \\ 4 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, donc -1 est une valeur propre de g et la dimension du sous-espace propre $\operatorname{Ker}(g+I_E)$ est égale à 1.

Comme $C_2 - C_3 = 0$, le vecteur $(0,1,-1)$ est un vecteur propre de g associé à -1, donc

$$\operatorname{Ker}(g+I_E) = \mathbb{R}\cdot(0,1,-1).$$

❧ La matrice

$$B-(-2)I_3 = B+2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 6 & 5 \\ 4 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

est équivalente (opérations $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$) à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

dont le rang est clairement égal à 2. On en déduit également la relation de liaison

$$0 = 2(C_2+C_1) - 3(C_3+C_1) = -C_1 + 2C_2 - 3C_3$$

entre les colonnes de $B+2I_3$.

On a ainsi démontré que $\dim \operatorname{Ker}(g+2\,I_E) = 1$, donc -2 est aussi une valeur propre de g et que

$$\operatorname{Ker}(g+2\,I_E) = \mathbb{R}\cdot(1,-2,3).$$

> *On peut déjà constater que*
>
> $$\operatorname{Ker}(g+I_E) = \operatorname{Ker}(f+I_E)$$
>
> *et que*
>
> $$\operatorname{Ker}(g+2\,I_E) \subset \operatorname{Ker}(f+2\,I_E)$$
>
> *puisque le vecteur* $(1,-2,3)$ *vérifie l'équation cartésienne du plan* $\operatorname{Ker}(f+2\,I_E)$.

8. Sachant que -1 et -2 sont des valeurs propres de B, le polynôme caractéristique de B est divisible par

$$(X+1)(X+2).$$

On peut donc le calculer d'une manière quelconque (même avec la règle de Sarrus), la factorisation ne sera pas difficile ! On finit par trouver

$$\chi_B = (X+1)(X+2)^2.$$

❧ On en déduit que le spectre de la matrice B est la paire $\{-2;\ -1\}$. On a démontré à la question précédente que les deux sous-espaces propres étaient des droites vectorielles : la somme des dimension étant strictement inférieure à la dimension de E, la matrice B n'est pas diagonalisable.

Par conséquent, le polynôme minimal μ_B n'est pas scindé à racines simples. Or μ_B est un diviseur de χ_B (Théorème de Cayley-Hamilton), les deux polynômes ont les mêmes racines (les valeurs propres de B) et ils sont unitaires tous les deux. Par conséquent,

$$\mu_B = \chi_B.$$

9. Le calcul de $(B+2I_3)^2$ et de $(B+I_3)(B+2I_3)$ ne devrait pas poser de difficulté...

❧ On a déjà remarqué plus haut **[7.]** que

$$\operatorname{Ker}(g+I_E) = \operatorname{Ker}(f+I_E).$$

L'égalité matricielle

$$(B+2I_3)^2 = \Pi_{-1} = (A+2I_3)$$

prouve que $(g+2\,I_E)^2 = (f+2\,I_E)$ et en particulier que

$$\operatorname{Ker}(g+2\,I_E)^2 = \operatorname{Ker}(f+2\,I_E).$$

❧ D'après **[4.]** avec $n=1$,

$$\begin{aligned} A &= -\Pi_{-1} - 2\Pi_{-2} \\ &= -(B+2I_3)^2 + 2(B+I_3)(B+3I_3) \\ &= B^2 + 4B + 2I_3. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} N = B - A &= -B^2 - 3B - 2I_3 \\ &= -(B+I_3)(B+2I_3). \end{aligned}$$

> *On peut aussi obtenir le résultat sans réfléchir, rien qu'en développant le second membre.*

10. On peut vérifier par le calcul que

$$AN = NA = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -4 \\ -6 & 6 & 6 \end{pmatrix} = -2N.$$

> *On peut aussi déduire des calculs effectués à la question précédente que les matrices* A *et* N *sont toutes les deux des polynômes en* B. *Comme l'algèbre* $\mathbb{R}[B]$ *est commutative, on peut en déduire que* A *et* N *commutent (sans calcul supplémentaire).*

❧ Comme A et N commutent et que, par définition, $N = B - A$, on peut appliquer la Formule du binôme pour développer

$$B^n = \big(A + (B-A)\big)^n = (A+N)^n.$$

Comme $N^2 = 0_3$, la Formule du binôme ne compte que deux termes :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad B^n = A^n + nA^{n-1}N.$$

Il est clair que $A^0N = N$ et on a vérifié que $AN = -2N$. On en déduit par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^kN = (-2)^kN$$

et donc **[4.]** que

$$\begin{aligned} \forall\, n \geqslant 1, \quad B^n &= A^n + n(-2)^{n-1}N \\ &= (-1)^n\Pi_{-1} + (-2)^n\Pi_{-2} + n(-2)^{n-1}N. \end{aligned}$$

On peut aussi arriver à cette expression en travaillant dans l'algèbre commutative $\mathbb{R}[B]$ *des polynômes en* B.
Comme $\mu_B = (X+1)(X+2)^2$,

$$\begin{aligned}\Pi_{-1}N &= (B+2I_3)^2 \times [-(B+I_3)(B+2I_3)]\\ &= -(B+I_3)(B+2I_3)^2 \times (B+2I_3) = 0_3.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\Pi_{-2} &= -(B+I_3)(B+2I_3+I_3)\\ &= -(B+I_3)(B+2I_3) - (B+I_3)\\ &= N - (B+I_3)\end{aligned}$$

et comme $N^2 = 0_3 = \mu_B(B)$,

$$\begin{aligned}\Pi_{-2}N &= (B+I_3)(B+2I_3)(B+2I_3-I_3)\\ &= (B+I_3)(B+2I_3)^2 - (B+I_3)(B+2I_3)\\ &= N.\end{aligned}$$

On déduit alors de **[4.]** *que*

$$A^{n-1}N = (-2)^{n-1}\Pi_{-2}N = (-2)^{n-1}N$$

puis que

$$B^n = \big[(-1)^n\Pi_{-1} + (-2)^n\Pi_{-2}\big] + n(-2)^{n-1}N.$$

Partie D. Réduction simultanée

11. D'après **[7.]**, on peut choisir

$$\varepsilon_3 = (0, 1, -1).$$

12. D'après **[9.]** et **[1.a.]**, le plan $\operatorname{Ker}(g+2\,I_E)^2$ est représenté par l'équation cartésienne

$$[x - 4y - 3z = 0].$$

D'après **[7.]**, la droite $\operatorname{Ker}(g+2\,I_E)$ est dirigée par le vecteur

$$(1, -2, 3).$$

Le vecteur $(1, 1, -1)$ vérifie l'équation cartésienne sans être proportionnel au vecteur $(1, -2, 3)$, donc on peut choisir

$$\varepsilon_2 = (1, 1, -1) \in \operatorname{Ker}(g+2\,I_E)^2 \setminus \operatorname{Ker}(g+2\,I_E).$$

13. Par définition de ε_1,

$$(g+2\,I_E)(\varepsilon_1) = (g+2\,I_E)^2(\varepsilon_2) = 0_E$$

puisqu'on a choisi $\varepsilon_2 \in \operatorname{Ker}(g+2\,I_E)^2$.

Par ailleurs, on a choisi $\varepsilon_2 \notin \operatorname{Ker}(g+2\,I_E)$, donc le vecteur ε_1 est un vecteur *non nul* de $\operatorname{Ker}(g+2\,I_E)$. Si la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ était liée, alors ε_2 serait proportionnel à ε_1 et appartiendrait par conséquent à $\operatorname{Ker}(g+2\,I_E)$ — ce qui est faux par hypothèse. Les vecteurs ε_1 et ε_2 ne sont donc pas proportionnels.

Le couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est donc une famille *libre* de *deux* vecteurs dans le sous-espace

$$\operatorname{Ker}(g+2\,I_E)^2 \overset{[9.]}{=} \operatorname{Ker}(f+2\,I_E) = \operatorname{Ker}\pi_{-1}$$

qui est un *plan* **[1.a.]**. Donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de ce plan.

14. D'après **[8.]**, le polynôme $(X+1)(X+2)^2$ est un polynôme annulateur de g. Comme $(X+1)$ et $(X+2)^2$ sont premiers entre eux, on déduit du Théorème de décomposition des noyaux que

$$E = \operatorname{Ker}(g+I_E) \oplus \operatorname{Ker}(g+2\,I_E)^2.$$

Par conséquent, en concaténant $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, qui est une base de $\operatorname{Ker}(g+2\,I_E)^2$, avec le vecteur ε_3, qui dirige $\operatorname{Ker}(g+I_E)$, on obtient une base de $E = \mathbb{R}^3$.

On peut aussi conclure en faisant référence à **[2.]** *et à* **[9.]**, *sans invoquer le Théorème de décomposition des noyaux.*

15. D'après **[11.]**, **[12.]** et **[13.]**,

$$\begin{aligned} g(\varepsilon_1) &= -2\varepsilon_1, && (\varepsilon_1 \in \operatorname{Ker}(g+2\,I_E))\\ g(\varepsilon_2) &= \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2, && (\text{déf. de } \varepsilon_1)\\ g(\varepsilon_3) &= -\varepsilon_3. && (\varepsilon_3 \in \operatorname{Ker}(g+I_E))\end{aligned}$$

Donc

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

❧ D'après **[9.]** et **[13.]**, le couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base du sous-espace propre $\operatorname{Ker}(f+2\,I_E)$ et le vecteur ε_3 dirige le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(f+I_E)$. Par conséquent,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

❧ Enfin, par définition,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g) - \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Solution V ❀ Réduction simultanée

Partie A. Étude d'un endomorphisme nilpotent

1. Comme $\varphi \neq \omega_E$, le sous-espace $\operatorname{Ker}\varphi$ est un sous-espace strict de E et comme $\dim E = 3$,

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi \leqslant 2.$$

On déduit du Théorème du rang que

$$\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim E - \dim \operatorname{Ker}\varphi \geqslant 1.$$

Par ailleurs, comme $\varphi \circ \varphi = \omega_E$, il faut que $\operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{Ker}\varphi$ et en particulier que

$$\dim \operatorname{Im}\varphi \leqslant \dim \operatorname{Ker}\varphi.$$

Par conséquent,

$$\dim \operatorname{Im}\varphi = 1 \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker}\varphi = 2.$$

On a ainsi démontré que $\operatorname{Ker}\varphi$ était un hyperplan de E ($\dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim E - 1$). Par conséquent, il existe un vecteur $e_3 \neq 0_E$ tel que

$$E = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \mathbb{K}\cdot e_3.$$

> *Le cours sur les hyperplans précise que n'importe quel vecteur e_3 non nul n'appartenant pas au noyau de φ vérifie cette relation.*

2. On a démontré à la question précédente que $\dim \operatorname{Im} \varphi = 1$.

Il est clair que le vecteur $e_2 = \varphi(e_3)$ appartient à $\operatorname{Im} \varphi$ et comme $e_3 \notin \operatorname{Ker} \varphi$, le vecteur e_2 n'est pas nul. Par conséquent, c'est un vecteur directeur de la droite vectorielle $\operatorname{Im} \varphi$.

❧ Enfin,

$$\varphi(e_2) = \varphi \circ \varphi(e_3) = 0_E$$

puisque $\varphi \circ \varphi = \omega_E$.

3. On a démontré plus haut que $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$ et on vient de trouver un vecteur $e_2 \neq 0_E$ dans $\operatorname{Ker} \varphi$. La famille (e_2) est une famille libre et, d'après le Théorème de la base incomplète, il existe un vecteur e_1 tel que (e_1, e_2) soit une base de $\operatorname{Ker} \varphi$:

$$\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Vect}(e_1, e_2).$$

4. On connaît une base (e_1, e_2) de $\operatorname{Ker} \varphi$: c'est donc une famille libre. Comme le vecteur e_3 n'appartient pas à $\operatorname{Ker} \varphi$, on en déduit que la famille

$$(e_1, e_2, e_3)$$

est libre (augmentation d'une famille libre). Comme $\dim E = 3$, cette famille libre est en fait une *base* de E.

Comme e_1 et e_2 appartiennent au noyau de φ,

$$\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = 0_E.$$

Enfin, par construction,

$$\varphi(e_3) = e_2.$$

Donc la matrice de φ relative à la base (e_1, e_2, e_3) est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. D'après la question précédente, la famille

$$\mathscr{B}_1 = (e_2, e_3, e_1)$$

est une base de E et la matrice de φ relative à cette base est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. On sait que $\operatorname{rg} \varphi = 1$. Le rang de la matrice étant égal à 2, cette matrice ne peut pas représenter φ.

Partie B. Interpolation polynomiale

7. Il est clair que Φ est une application linéaire de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.

Si le polynôme P appartient au noyau de Φ, alors

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = P(\mu) = 0,$$

donc λ est une racine de P de multiplicité supérieure à 2 et μ est une racine de P. Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que P doit être divisible par

$$(X - \lambda)^2 (X - \mu).$$

Or $P \in \mathbb{K}_2[X]$, donc $P = 0$. On a ainsi démontré que l'application linéaire Φ était injective.

Comme les espaces de départ et d'arrivée sont des espaces vectoriels de même dimension (dimension finie, égale à 3), le Théorème du rang prouve que Φ est en fait un isomorphisme.

8. Comme $\Phi : \mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}^3$ est un isomorphisme, chaque vecteur de $\mathbb{K}^3$ admet un, et un seul, antécédent par Φ. Il existe donc un unique triplet (Q_0, Q_1, Q_2) qui vérifie les conditions demandées.

En tant qu'image de la base canonique de $\mathbb{K}^3$ par l'isomorphisme $\Phi^{-1} : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}_2[X]$, le triplet (Q_0, Q_1, Q_2) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

❧ Le polynôme Q_2 admet λ pour racine de multiplicité supérieure à 2 et, par construction, son degré est inférieur à 2. Donc il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que

$$Q_2 = a(X - \lambda)^2$$

et comme $Q_2(\mu) = 1$, on a donc

$$Q_2 = \frac{(X - \lambda)^2}{(\mu - \lambda)^2}.$$

❧ Le polynôme Q_1 admet λ et μ pour racines et son degré est inférieur à 2, donc il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que

$$Q_1 = a(X - \lambda)(X - \mu).$$

On a donc

$$Q_1' = a(X - \mu) + a(X - \lambda)$$

et comme $Q_1'(\lambda) = 1$, on a donc

$$Q_1 = \frac{(X - \lambda)(X - \mu)}{\lambda - \mu}.$$

❧ Comme μ est une racine de Q_0 et que $\deg Q_0 \leqslant 2$, il existe deux scalaires a et b tels que

$$Q_0 = (X - \mu)\big[a + b(X - \lambda)\big].$$

La condition $Q_0(\lambda) = 1$ se traduit par

$$(\lambda - \mu)a = 1.$$

La condition $Q_0'(\lambda) = 0$ se traduit par

$$[a + 0] + (\lambda - \mu) \cdot b = 0.$$

On a donc

$$Q_0 = \frac{X - \mu}{\lambda - \mu} - \frac{(X - \mu)(X - \lambda)}{(\lambda - \mu)^2}.$$

9. On cherche un polynôme P tel que

$$\Phi(P) = (\alpha, 1, \beta).$$

Comme Φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ sur $\mathbb{K}^3$, chaque vecteur de $\mathbb{K}^3$ admet un, et un seul, antécédent $P \in \mathbb{K}_2[X]$ par Φ. De plus,

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= (\alpha, 1, \beta) \\ &= \alpha\Phi(Q_0) + \Phi(Q_1) + \beta\Phi(Q_2) \\ &= \Phi(\alpha Q_0 + Q_1 + \beta Q_2) \end{aligned}$$

donc cet antécédent est le polynôme

$$P = \alpha Q_0 + Q_1 + \beta Q_2.$$

Partie C. Réduction simultanée

10. Le polynôme minimal de f est scindé à racines simples, donc l'endomorphisme f est diagonalisable. De plus, le polynôme caractéristique de f est égal à

$$(X-\alpha)^2(X-\beta).$$

On sait que les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres et, comme l'endomorphisme est diagonalisable, les multiplicités des valeurs propres sont les dimensions des sous-espaces propres associés.

En posant

$$F = \operatorname{Ker}(f-\alpha\, I_E) \quad \text{et} \quad G = \operatorname{Ker}(f-\beta\, I_E),$$

on a donc $E = F \oplus G$ avec $\dim F = 2$ et $\dim G = 1$.

11. Comme les endomorphismes f et g commutent, chaque sous-espace propre de f est stable par g. Les sous-espaces vectoriels F et G sont donc stables par g.

12. Comme $E = F \oplus G$, en prenant une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de F et un vecteur directeur ε_3 de G, on constitue une base

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

de E. Par définition de F et G, la matrice de f relative à cette base est égale à

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & \beta \end{array}\right).$$

Sans précision supplémentaire, on déduit de la question précédente que la matrice de g relative à cette base est diagonale par blocs :

$$\left(\begin{array}{cc|c} \star & \star & 0 \\ \star & \star & 0 \\ \hline 0 & 0 & \star \end{array}\right).$$

> *Le vecteur ε_3 est un vecteur propre de g mais on ne sait pas encore si ε_3 est, en tant que vecteur propre de g, associé à la valeur propre α ou à la valeur propre β.*

❧ Comme le polynôme caractéristique de g est scindé, l'endomorphisme g est trigonalisable. Comme le sous-espace vectoriel F est stable par g, l'endomorphisme de F induit par restriction de g est lui aussi trigonalisable. On peut donc choisir la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de F pour que, dans cette base, la matrice de l'endomorphisme g_F induit par restriction de g soit triangulaire supérieure. La matrice de g est alors de la forme

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & \star & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right).$$

> *Comme cette nouvelle base est encore obtenue en concaténant une base de F et un vecteur directeur de G, la matrice de f reste inchangée.*

❧ Si les scalaires λ_1 et λ_2 étaient distincts, alors le bloc diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \star \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$$

possèderait deux valeurs propres distinctes et serait donc diagonalisable. L'endomorphisme g serait lui aussi diagonalisable — alors que son polynôme minimal n'est pas scindé à racines simples : c'est impossible. Il faut donc $\lambda_1 = \lambda_2$ et comme le polynôme caractéristique de g est égal à $(X-\alpha)^2(X-\beta)$, on a donc

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \beta.$$

❧ Si le coefficient $\star$ était nul, alors la matrice de g serait diagonale et, on vient de le justifier, c'est impossible.

13. Dans la base $\mathscr{B}_1$ décrite à la question précédente, la matrice de $g-f$ est de la forme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & x_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Cette matrice n'est pas nulle (donc $g - f \neq \omega_E$) mais son carré est nul, donc $g-f$ est bien nilpotent d'indice 2.

❧ Notons $\mathscr{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. On a donc

$$(g-f)(\varepsilon_2) = x_0 \cdot \varepsilon_1$$

où le scalaire x_0 n'est pas nul.

La famille

$$\mathscr{B}_0 = (x_0 \cdot \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

est donc encore une base de E ; le couple

$$(x_0 \cdot \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

est encore une base de F et le vecteur ε_3 est toujours un vecteur directeur de G. Par conséquent,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(g-f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(g) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

> *On ne peut pas appliquer directement le résultat établi dans la première partie* ***[4.]****. En effet, pour que la matrice de f soit diagonale, il faut que les vecteurs de la base $\mathscr{B}_0$ choisie soient des vecteurs propres de f — la première partie n'assure rien de tel !*

14. On sait que f est diagonalisable (son polynôme minimal est scindé à racines simples). Par conséquent, tout polynôme en f est également diagonalisable.

> *Plus précisément, si $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres de f, alors la matrice relative à $\mathscr{B}$ de n'importe quel endomorphisme $\psi \in \mathbb{K}[f]$ est diagonale.*

Or g n'est pas diagonalisable (son polynôme minimal possède une racine double), donc $g \notin \mathbb{K}[f]$.

15. D'après le cours, $\dim \mathbb{K}[g] = \dim \mu_g = 3$ et donc

$$\mathbb{K}[g] = \operatorname{Vect}(I_E, g, g^2).$$

❧ Par construction de la base $\mathscr{B}_0$, on a

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(I_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(g) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(g^2) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, quel que soit le polynôme $P_0 \in \mathbb{K}_2[X]$,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}\big(P_0(g)\big) = \begin{pmatrix} P_0(\alpha) & P_0'(\alpha) & 0 \\ 0 & P_0(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & P_0(\beta) \end{pmatrix}.$$

Comme $\alpha \neq \beta$, on déduit de la deuxième partie **[8.]** qu'il existe un (unique) polynôme $P_0 \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que

$$\big(P_0(\alpha) = \alpha, P_0'(\alpha) = 0, P_0(\beta) = \beta\big)$$

et donc tel que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}\big(P_0(g)\big) = \mathrm{Diag}(\alpha, \alpha, \beta) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f).$$

On a ainsi démontré que

$$f = P_0(g) \in \mathbb{K}_2[g].$$

16. a. Ce n'est pas l'existence des endomorphismes qu'il s'agit de justifier (elle est évidente), c'est leur appartenance à $\mathbb{K}[g]$: même raisonnement qu'à la question précédente !

Il existe un unique triplet de polynômes (P_1, P_2, P_3) appartenant à $\mathbb{K}_2[X]$ tels que

$$\begin{aligned} &P_1(\alpha) = 1, \quad P_1'(\alpha) = 0, \quad P_1(\beta) = 0, \\ &P_2(\alpha) = 0, \quad P_2'(\alpha) = 1, \quad P_2(\beta) = 0, \\ &P_3(\alpha) = 0, \quad P_3'(\alpha) = 0, \quad P_3(\beta) = 1 \end{aligned}$$

et, comme on l'a vu à la question précédente, les endomorphismes définis par

$$\pi_1 = P_1(g), \quad \pi_2 = P_2(g), \quad \pi_3 = P_3(g)$$

vérifient les propriétés voulues.

> *On a vu à la fin de la deuxième partie* ***[9.]*** *comment expliciter ces trois polynômes à l'aide des polynômes* Q_0, Q_1 *et* Q_2.

16. b. Il est clair que

$$g = f + (g - f).$$

Comme g et f commutent par hypothèse, les endomorphismes f et $g - f$ commutent. On peut donc appliquer la Formule du binôme :

$$g^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} \circ (g - f)^k.$$

Comme $g - f$ est nilpotent d'indice 2, on en déduit que

$$g^n = f^n + n f^{n-1} \circ (g - f).$$

Dans la base $\mathscr{B}_0$, cette relation se traduit matriciellement par

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(g^n) = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha^n & 0 \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(g^n) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\alpha^n \pi_1 + n\alpha^{n-1}\pi_2 + \beta^n \pi_3).$$

L'application $[w \mapsto \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(w)]$ étant injective, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad g^n = \alpha^n \pi_1 + n\alpha^{n-1}\pi_2 + \beta^n \pi_3.$$

17. Comme $|||\cdot|||$ est une norme sur $L(E)$, on déduit de la question précédente que

$$0 \leqslant |||g^n||| \leqslant |\alpha^n| \cdot |||\pi_1||| + |n\alpha^{n-1}| \cdot |||\pi_2||| + |\beta^n| \cdot |||\pi_3|||$$

(inégalité triangulaire et homogénéité d'une norme). Si $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha^n = \lim_{n\to+\infty} n\alpha^{n-1} = \lim_{n\to+\infty} \beta^n = 0$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} |||g^n||| = 0$$

par encadrement.

❧ Réciproquement, supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} |||g^n||| = 0.$$

Alors, pour <u>tout</u> vecteur $x \in E$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|g^n(x)\| \leqslant |||g^n|||\, \|x\|$$

et par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} \|g^n(x)\| = 0.$$

En particulier, si x est le premier vecteur de la base $\mathscr{B}_0$, alors

$$g^n(x) = \alpha^n \cdot x$$

et comme $x \neq 0_E$,

$$|\alpha|^n = \frac{\|g^n(x)\|}{\|x\|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit que $|\alpha| < 1$.

De même, si x est le troisième vecteur de la base $\mathscr{B}_0$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad g^n(x) = \beta^n \cdot x.$$

On en déduit que $|\beta|^n$ tend vers 0 et donc que $|\beta| < 1$.

❧ On a ainsi démontré que $|||g^n|||$ tend vers 0 si, et seulement si, $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$.