Indication : Ces exercices ont pour objectif de vous faire apprendre le cours par le calcul. Mieux vous maîtriserez le cours, moins vous aurez à faire de calculs !

EXERCICE 1.— Pour chacun des exemples suivants, donner le spectre de A et expliciter une matrice inversible Q telle que $Q^{-1}AQ$ soit diagonale.

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

EXERCICE 2.— On pose

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer AP. En déduire que P est inversible et, sans calculer P^{-1}, que $P^{-1}AP$ est diagonale.

EXERCICE 3.— La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a une valeur propre évidente : laquelle ? Expliciter une base du sous-espace propre qui lui est associé. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.

EXERCICE 4.— Vérifier que les réels $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$ sont des valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -7 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

puis que 1 n'est pas valeur propre de A. Calculer le polynôme caractéristique de A et le polynôme minimal de A.

EXERCICE 5.— Vérifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente d'indice 3. Expliciter une base de $\operatorname{Ker} A$. Compléter cette famille pour obtenir une base de $\operatorname{Ker} A^2$. Compléter cette seconde famille pour obtenir une base de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

EXERCICE 6.— Calculer le polynôme minimal, le polynôme caractéristique et les puissances des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu \end{pmatrix}$$

EXERCICE 7.— Si P est un polynôme annulateur de A, alors le reste R_k de la division euclidienne de X^k par P permet de calculer A^k.

Polynôme P	Matrice A^k
$X^2 + X - 2$	$\frac{1}{3}(2I + A) + \frac{(-2)^k}{3}(I - A)$
$X^2 - 6X + 9$	$3^k I + 3^{k-1}k(A - 3I)$
$X^3 - 2X^2 + X$	$k(A^2 - A) + (-A^2 + 2A)$

EXERCICE 8.— On suppose que le polynôme minimal d'une matrice A est égal à

$$(X - \lambda)(X - \mu)$$

où λ et μ sont deux scalaires distincts. Les deux matrices définies par

$$P_\lambda = \frac{1}{\lambda - \mu}(A - \mu I) \quad \text{et par} \quad P_\mu = \frac{1}{\lambda - \mu}(\lambda I - A)$$

vérifient les relations suivantes :

$$P_\lambda + P_\mu = I, \quad P_\lambda P_\mu = P_\mu P_\lambda = 0, \quad \lambda P_\lambda + \mu P_\mu = A, \quad P_\lambda^2 = P_\lambda, \quad P_\mu^2 = P_\mu.$$

La matrice P_λ représente la projection sur $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(A - \mu I)$.

Comment interpréter la relation suivante ?

$$\frac{X - \mu}{\lambda - \mu} + \frac{\lambda - X}{\lambda - \mu} = 1$$

EXERCICE 9.— Comme 1 et 2 sont des valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cette matrice est trigonalisable, mais pas diagonalisable.

On note u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Expliciter un vecteur e_3 qui appartient à $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{I})^2$ mais pas à $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{I})$.

Le Professeur T. a lu dans votre esprit : vous allez trouver que le vecteur $e_2 = u(e_3) - 2e_3$ est proportionnel à $(1, 1, 0)$. Expliquez ce don extraordinaire de divination.

On note e_1, un vecteur propre de u relatif à la valeur propre 1. Démontrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démontrer que la matrice A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

en explicitant une matrice P telle que $P^{-1}AP = B$.