Lycée Pierre CORNEILLE **MP**
ANNÉE SCOLAIRE 2023/2024

Composition de Mathématiques

Le 24 janvier 2024 – De 13 heures à 16 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ Problème ❖

On note $\mathbb{F}$, l'ensemble des nombres réels positifs non entiers :

$$\mathbb{F} = \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$$

et $\mathbb{D}$, l'ensemble des nombres complexes dont le module est strictement inférieur à 1 :

$$z \in \mathbb{D} \iff |z| < 1.$$

L'objet de ce problème est de calculer la valeur de l'intégrale

$$I(x) = \int_0^1 \frac{u^{x-1} + u^{-x}}{1+u}\,du.$$

On considérera en particulier la fonction g définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad g(x) = \frac{1}{1+x}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'intégrale $I(x)$ définie dans le préambule existe si, et seulement si, $0 < x < 1$.

Partie A. Une identité intégrale

On considère ici une fonction f à valeurs réelles, définie et développable en série entière sur l'intervalle $[0,1[$. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les coefficients de son développement et on pose

$$\forall\, z \in \mathbb{D}, \quad f_0(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

2. Démontrer que l'intégrale

$$\int_0^1 v^{x-1} f(yv)\,dv$$

existe pour tout $x > 0$ et tout $0 \leqslant y < 1$. Préciser la valeur de cette intégrale pour $y = 0$.

Pour $x > 0$ et $0 \leqslant y < 1$, on pose

$$S[f](x,y) = \int_0^1 v^{x-1} f(yv)\,dv.$$

3. Démontrer que, pour tout $x > 0$, la fonction

$$[y \mapsto S[f](x,y)]$$

est continue sur l'intervalle $[0,1[$.

4. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{F}$, la fonction

$$[y \mapsto S[f](x,y)]$$

est développable en série entière sur $[0,1[$. (On explicitera les coefficients de son développement.)

Pour $x \in \mathbb{F}$ et $0 \leqslant y < 1$, on pose

$$J[f](x,y) = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,\mathfrak{Re}\left[\int_0^1 e^{i\pi x t} f_0(-ye^{i\pi t})\,dt\right],$$

où la fonction f_0 a été définie dans l'introduction de cette partie.

5. Pour $x \in \mathbb{F}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $I_n(x)$ définie par

$$I_n(x) = \frac{(-1)^n \pi}{\sin \pi x}\int_0^1 \cos \pi(n+x)t\,dt.$$

6. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{F}$, la fonction

$$[y \mapsto J[f](x,y)]$$

est développable en série entière sur $[0,1[$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{F},\ \forall\, 0 \leqslant y < 1, \quad S[f](x,y) = J[f](x,y).$$

Pour $0 < x < 1$ et $0 \leqslant y < 1$, on pose

$$C[f](x,y) = S[f](x,y) + S[f](1-x,y).$$

7. Démontrer que

$$C[g](x,y) = \frac{\pi(1-y)}{\sin \pi x}\int_0^1 \frac{\cos \pi(1-x)t + \cos \pi x t}{1 - 2y\cos \pi t + y^2}\,dt.$$

Partie B. Noyau de Poisson

Pour $0 \leqslant y < 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, on définit le ***noyau de Poisson*** *P en posant*

$$P(t,y) = \frac{1-y^2}{1-2y\cos \pi t + y^2}.$$

8. Démontrer l'identité suivante.

$$\forall\, 0 \leqslant y < 1,\ \forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad P(t,y) = \mathfrak{Re}\,\frac{1+ye^{i\pi t}}{1-ye^{i\pi t}}.$$

9. Soit $t \in [0,1]$. Démontrer que la fonction

$$[y \mapsto P(t,y)]$$

est développable en série entière sur $[0,1[$ et calculer les coefficients de son développement.

10. Démontrer que

$$\forall\, 0 \leqslant y < 1, \quad \int_0^1 P(t,y)\,dt = 1.$$

> *Dans les deux questions suivantes, on désigne par φ une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles.*

11. Soit $0 < \alpha < 1$. Démontrer que

$$\lim_{y\to 1} \int_\alpha^1 P(t,y)\varphi(t)\,dt = 0$$

et que

$$\left| \int_0^\alpha P(t,y)\varphi(t)\,dt \right| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant \alpha} \left|\varphi(t)\right|.$$

12. En déduire que

$$\lim_{y\to 1} \int_0^1 P(t,y)\varphi(t)\,dt = \varphi(0).$$

☞ *On pourra commencer par traiter le cas $\varphi(0) = 0$.*

Partie C. Application

> *Pour $0 < x < 1$ et $0 \leqslant y < 1$, on pose*
>
> $$A(x,y) = \int_0^1 P(t,y) \cos \pi x t\,dt.$$

13. Pour $0 < x < 1$ et $0 \leqslant y < 1$, exprimer $C[g](x,y)$ en fonction de $A(x,y)$ et de $A(1-x,y)$.

14. Soit $0 < x < 1$, fixé. Déterminer la limite de $C[g](x,y)$ quand y tend vers 1 par valeurs inférieures.

15. En déduire la valeur de $I(x)$ pour $0 < x < 1$.

Extraits des rapports du jury

Remarques générales

Les problèmes de permutation de symboles $\sum$ et $\int$; $\sum$ et lim et $\int$ et lim se rencontrent dans presque tous les énoncés de sujets de mathématiques.

Les candidats maîtrisant bien les outils principaux pour aborder ces problèmes (convergence normale, convergence uniforme, convergence dominée...) sont généreusement recompensés par le barème.

Les candidats essayant de tricher à ce sujet :
— en écrivant tout simplement *"par un théorème du cours"*,
— en énoncant un théorème sans vérifier ses conditions d'application dans le cadre du sujet,
— ou encore faisant des majorations inutiles ou imprécises
sont toujours fortement pénalisés.

Il est vivement conseillé aux candidats de bien assimiler ce morceau de programme, car il est extrêmement important pour réussir l'epreuve de mathématiques.

Il est toujours plus valorisant de "bien faire" un peu moins de questions que d'essayer de grappiller des points partout.

"Bien faire" n'est pas synonyme d'écrire beaucoup : la longueur de la rédaction ne rajoute pas de points. Le correcteur cherche des arguments clés, formulés de manière précise et concise. Pour cela, souvent quelques lignes suffisent. Les meilleurs copies sont brèves.

Si vous ne connaissez pas la réponse, il vaut mieux ne rien écrire et admettre le résultat pour la suite que de perdre du temps à divaguer. Les élucubrations du type : *"procédons par analyse-synthèse" : analyse (suivi d'un baratin), synthèse (encore un baratin), bilan (et donc, on a ce qu'il fallait démontrer)* indisposent le correcteur.

Détails par question

1. Question plutôt bien traitée. La plupart des candidats ont remarqué que le problème était en 0. Néanmoins, un certain nombre d'entre eux se sont contentés d'une majoration, qui permettait d'obtenir la condition suffisante mais ne permettait pas de prouver que cette condition était également nécessaire.

2. Question facile qui a suscité beaucoup de difficultés : il s'agissait de prouver que l'hypothèse $0 < y < 1$ était suffisante pour que l'intégrale généralisée converge. Pour cela, il était inutile (et plus difficile) de passer par le développement de f en série entière. Il était possible, mais pas nécessaire, de passer par le changement de variable $t = \nu y$, démarche que pratiquement aucun candidat n'a suivie.

3. Beaucoup de candidats ont su se ramener à considérer la continuité en un point y_0 fixé dans l'intervalle $[0, 1[$. Mais pour vérifier les conditions d'application du théorème adéquat, les erreurs ont été nombreuses :
— la fonction f est bien continue sur l'intervalle $[0, 1[$, mais rien n'indique qu'elle soit bornée sur cet intervalle ;
— nombreuses erreurs de calcul sur les bornes supérieures en tentant de vérifier la condition de domination pour $y \in [a, b] \subset [0, 1[$.
Ici encore, très rares sont les candidats qui ont choisi de poser $t = y\nu$.

4. Question très classique d'intégration terme à terme. Seuls les arguments justes et précis ont été pris en compte :
— quelle est la série de fonctions étudiée ? s'agit-il d'une série entière ou seulement d'une série de fonctions ?
— sur quel intervalle l'étudie-t-on ?
— quelles sont les inégalités qui prouvent la convergence normale ?
— pourquoi la convergence normale permet-elle ici d'intégrer terme à terme ?
De nombreux candidats oublient que le signe des coefficients a_n est quelconque et omettent la valeur absolue, qui est pourtant nécessaire.

5. Question calculatoire, traitée correctement par la majorité des candidats. Le résultat encadré devait être exprimé sous la forme la plus simple possible.

6. À nouveau, les candidats qui ne savent pas appliquer avec soin le Théorème d'intégration terme à terme ont été pénalisés. L'erreur la plus fréquente a porté sur la variable d'intégration : on intègre ici par rapport à la variable t et, en tant que série de fonctions de f, on n'étudie pas une série entière.

7. Réussie par une grande partie des candidats. Les arguments malhonnêtes étaient facilement détectables et ont été lourdement sanctionnés.

8. Question traitée correctement par une majorité de candidats.

9. Question traitée correctement par une bonne partie des candidats. Certains n'ont pas su réarranger les termes à la fin. Le terme constant du développement a parfois suscité des erreurs.

10. Ici encore, il fallait justifier avec soin l'intégration terme à terme.

11. Extrêmement peu de candidats ont réussi à traiter cette question correctement. Il était important de remarquer que $P(y, t) \geqslant 0$ et d'étudier les variations de $P(y, t)$ en fonction de t.

12. Dans le cas $\varphi(0) = 0$, beaucoup de candidats ont cité les inégalités établies à la question précédente, mais très peu ont su s'en servir dans un ordre cohérent — une fois encore, seul un raisonnement correct et précis était récompensé.

Quelques candidats ont su déduire le cas général de ce cas particulier et ont pu grappiller quelques points à cette occasion.

13. Question très facile (il suffisait de lire le sujet), traitée dans une majorité de copies.

14. Question facile qui découle de la précédente, traitée dans beaucoup de copies.

15. Pour passer à la limite sous le signe $\int$, il fallait dominer

$$\left|(u^{x-1} + u^{-x})g(yu)\right|$$

par une fonction indépendante de y et intégrable en fonction de $u \in [0, 1]$ (le paramètre x étant fixé). Mais la plupart des candidats ayant traité les deux questions précédentes se sont contentés d'un calcul purement formel, menant à la réponse sans la démontrer.

Solution ❀ Noyau de Poisson

1. Quel que soit le réel x, la fonction

$$\varphi_x = \left[u \mapsto \frac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+u}\right]$$

est évidemment continue sur l'intervalle $]0,1]$. Par conséquent, l'intégrale $I(x)$ existe si, et seulement si, la fonction φ_x est intégrable au voisinage de $u=0$.

❧ On rappelle le Théorème de comparaison par équivalence : si $f(u) \sim g(u)$ lorsque u tend vers 0, alors f est intégrable au voisinage de 0 si, et seulement si, g est intégrable au voisinage de 0.

> *L'intégrabilité d'une fonction f est en fait une propriété de la fonction $|f|$. Il n'est donc pas utile d'étudier le signe d'une fonction pour justifier son intégrabilité.*

❧ Si $0<x<1$, alors

$$\frac{u^{x-1}}{1+u} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{u^{1-x}} \quad \text{et} \quad \frac{u^{-x}}{1+u} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{u^{x}}.$$

Comme $1-x<1$ et et que $x<1$, alors les deux termes sont intégrables (en tant que fonctions de u) au voisinage de 0 et, par linéarité, la fonction φ_x est intégrable au voisinage de $u=0$.

❧ Si $x \geqslant 1$, alors $(x-1) \geqslant 0$, donc u^{x-1} reste bornée lorsque u tend vers 0 et donc

$$\varphi_x(u) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{u^x}.$$

Comme $x \geqslant 1$, alors $[u \mapsto u^{-x}]$ n'est pas intégrable au voisinage de $u=0$, donc φ_x n'est pas intégrable au voisinage de $u=0$.

❧ Si $x \leqslant 0$, alors $-x \geqslant 0$, donc u^{-x} reste bornée lorsque u tend vers 0 et donc

$$\varphi_x(u) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{u^{1-x}}.$$

Comme $1-x \geqslant 1$, alors $\left[u \mapsto u^{x-1}\right]$ n'est pas intégrable au voisinage de 0, donc φ_x n'est pas intégrable au voisinage de 0.

❧ En conclusion, la fonction φ_x est intégrable sur $]0,1]$ si, et seulement si, $0<x<1$.

Partie A. Une identité intégrale

2.

> *Les réels $x>0$ et $0 \leqslant y < 1$ sont fixés, seul v varie (entre 0 et 1).*

Par hypothèse, la fonction f est développable en série entière, et donc continue, sur l'intervalle $[0,1[$. Comme $0 \leqslant y < 1$ et $v \in [0,1]$, alors $0 \leqslant yv < 1$, donc la composée

$$\begin{array}{ccccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & yv & \longmapsto & f(yv) \end{array}$$

est continue sur le segment $[0,1]$ et par conséquent, elle est bornée.

Par produit, l'intégrande

$$v \mapsto v^{x-1} f(yv)$$

est une fonction continue sur $]0,1]$ et, d'après ce qui précède,

$$v^{x-1} f(yv) \underset{v\to 0}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{v^{1-x}}\right).$$

Comme $x>0$, on a $1-x<1$ et on déduit du Théorème de comparaison que l'intégrande est bien une fonction intégrable au voisinage de $v=0$ et donc intégrable sur l'intervalle $]0,1]$.

❧ Pour $y=0$,

$$\int_0^1 v^{x-1} f(yv)\,dv = f(0) \int_0^1 v^{x-1}\,dv = \frac{f(0)}{x}.$$

3. Considérons l'intervalle $\Omega = [0,1[$ et la fonction Φ définie par

$$\forall\, 0 < v \leqslant 1,\ \forall\, y \in \Omega, \quad \Phi(v,y) = v^{x-1} f(yv).$$

> *Dans cette question, le paramètre $x>0$ est fixé.*

❧ On a justifié en **[2.]** que, pour tout $y \in \Omega$, la fonction

$$[v \mapsto \Phi(v,y)]$$

était intégrable sur l'intervalle $]0,1]$.

❧ Pour les mêmes raisons, pour tout $0 < v \leqslant 1$, la fonction

$$\left[y \mapsto \Phi(v,y) = v^{x-1} f(yv)\right]$$

est continue sur l'intervalle $[0,1[$:

$$\begin{array}{ccccc} [0,1[& \longrightarrow & [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & yv & \longmapsto & f(yv) \end{array}$$

❧ Soit $0<a<1$. La fonction f est continue sur l'intervalle $[0,1[$ et donc bornée sur le segment $[0,a] \subset [0,1[$: il existe une constante $M_a > 0$ telle que

$$\forall\, t \in [0,a], \quad \left|f(t)\right| \leqslant M_a.$$

Or

$$\forall\, 0 \leqslant y \leqslant a,\ \forall\, 0 < v \leqslant 1, \quad 0 \leqslant yv \leqslant a,$$

donc

$$\forall\, 0 \leqslant y \leqslant a,\ \forall\, 0 < v \leqslant 1, \quad \left|\Phi(v,y)\right| \leqslant M_a v^{x-1}.$$

Le majorant est indépendant de y et, en tant que fonction de v, intégrable sur l'intervalle $]0,1]$ puisque $x>0$. La condition de domination est ainsi vérifiée.

❧ On déduit alors du Théorème de continuité que la fonction

$$\left[y \mapsto \int_0^1 \Phi(v,y)\,dv = S[f](x,y)\right]$$

est continue sur le segment $[0,a]$ pour tout $0<a<1$. Elle est donc continue sur l'intervalle

$$\Omega = [0,1[= \bigcup_{0<a<1} [0,a].$$

4. Par hypothèse, pour tout $0 \leqslant t < 1$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n,$$

la série étant absolument convergente.

Pour $y \in [0,1[$ et $v \in]0,1]$, on a bien $t = yv \in [0,1[$ et donc

$$\Phi(v,y) = v^{x-1} f(yv) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n v^{n+x-1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\forall\, v \in]0,1]\,, \quad f_n(v) = a_n y^n v^{n+x-1}.$$

> *On va intégrer en fonction de v et les paramètres $x \in \mathbb{F}$ et $y \in [0,1[$ sont fixés. C'est pour cette raison que nous ne les faisons pas apparaître dans l'expression des fonctions f_n.*
> *Il s'agit maintenant de justifier qu'on peut intégrer terme à terme la somme de la série de fonctions $\sum f_n$. Attention ! Comme $n+x-1$ n'est pas un entier naturel, la série de fonctions $\sum f_n$ n'est pas une série entière !*

❧ On sait déjà que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1[$.

❧ On sait aussi déjà que la somme de cette série de fonctions :

$$[v \mapsto \Phi(v,y)]$$

est continue sur l'intervalle d'intégration $]0,1]$.

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+x-1 > -1$ (car $x > 0$), donc la fonction $\left[v \mapsto v^{n+x-1}\right]$ est intégrable sur $]0,1]$. De plus,

$$\int_0^1 \left|a_n y^n v^{n+x-1}\right| dv = |a_n| y^n \int_0^1 v^{n+x-1}\, dv = \frac{|a_n| y^n}{n+x}.$$

Comme x et y sont fixés,

$$\frac{|a_n| y^n}{n+x} \underset{n\to+\infty}{=} o(|a_n| y^n).$$

Comme $0 \leqslant y < 1$, on sait que la série entière $\sum a_n y^n$ converge absolument. On déduit alors du Théorème de comparaison que la série

$$\sum \int_0^1 \left|f_n(v)\right| dv$$

est convergente.

❧ D'après le Théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(v)\, dv = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(v)\, dv.$$

Autrement dit,

$$\forall\, 0 \leqslant y < 1, \quad S[f](x,y) = \int_0^1 \Phi(v,y)\, dv = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+x}\, y^n$$

pour tout $x \in \mathbb{F}$, CQFD.

5. Pour $x \in \mathbb{F}$, on a $\sin \pi x \neq 0$ et $n+x \neq 0$ (puisque x n'est pas un entier). Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cos \pi(n+x)t\, dt &= \left[\frac{\sin \pi(n+x)t}{\pi(n+x)}\right]_{t=0}^{t=1}\\ &= \frac{\sin \pi(n+x)}{\pi(n+x)}\\ &= \frac{(-1)^n \sin \pi x}{\pi(n+x)}\end{aligned}$$

et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{F}, \quad I_n(x) = \frac{1}{n+x}.$$

> *Rappelons deux propriétés de la partie réelle qui seront utiles dans la suite du problème.*
> *Si $\sum z_n$ est une série complexe convergente, alors la série réelle $\sum \mathfrak{Re}(z_n)$ est aussi convergente et que*
> $$\mathfrak{Re}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}(z_n).$$
> *(Il n'est pas nécessaire que la série soit absolument convergente.)*
> *Si la fonction continue par morceaux f prend des valeurs complexes et si l'intégrale*
> $$\int_I f(t)\, dt$$
> *existe, alors*
> $$\mathfrak{Re}\Big(\int_I f(t)\, dt\Big) = \int_I \mathfrak{Re}\big(f(t)\big)\, dt.$$
> *(Il n'est pas nécessaire de supposer que la fonction f soit intégrable sur l'intervalle I, la convergence de l'intégrale suffit.)*
> *Bien entendu, la partie imaginaire $\mathfrak{Im}$ vérifie des propriétés analogues.*

6. Les deux paramètres $x \in \mathbb{F}$ et $0 \leqslant y < 1$ sont fixés. La seule variable qui varie effectivement ici est la variable d'intégration : $t \in [0,1]$.

❧ Pour $0 \leqslant y < 1$ et $t \in [0,1]$, il est clair que

$$|-ye^{i\pi t}| = y < 1.$$

Comme f_0 est développable en série entière sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$, alors

$$\mathfrak{Re}\big(e^{i\pi x t} f_0(-ye^{i\pi t})\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

où on a posé

$$u_n(t) = (-1)^n a_n y^n \cos \pi(x+n)t.$$

❧ Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue sur le segment $[0,1]$, et donc intégrable sur $[0,1]$.

❧ Par construction, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$ et sa somme, connue, est continue sur le segment $[0,1]$.

❧ Comme f est développable en série entière sur $[0,1[$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{D}$. En particulier, la série $\sum |a_n| y^n$ est convergente (puisque $0 \leqslant y < 1$).

Pour tout $t \in [0,1]$,

$$\left|u_n(t)\right| \leqslant |a_n| y^n.$$

Le majorant est indépendant de t et c'est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge <u>normalement</u> sur le <u>segment</u> $[0,1]$.

❧ On peut donc intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n y^n \int_0^1 \cos \pi(x+n)t\,dt \\ &= \frac{\sin \pi x}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n\, I_n(x).\end{aligned}$$

❧ On déduit alors de **[5.]** et de **[4.]** que

$$\begin{aligned}J[f](x,y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n I_n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+x} y^n = S[f](x,y).\end{aligned}$$

7. Dans cette question, on prend $f = g$. Comme

$$\forall\, x \in [0,1[\,,\quad g(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n,$$

on peut appliquer ce qui précède avec $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

À nouveau, les paramètres $0 < x < 1$ et $0 \leqslant y < 1$ sont fixés. Dans **[6.]**, *on a supposé que $x \in \mathbb{F}$. Comme $]0,1[\, \subset \mathbb{F}$, on peut appliquer ce qui a été démontré dans* **[6.]**.

❧ D'après **[6.]**,

$$S[g](x,y) = J[g](x,y) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \int_0^1 \mathfrak{Re}\Big[\frac{e^{i\pi x t}}{1 - ye^{i\pi t}}\Big]\,dt.$$

Le calcul de la partie réelle est classique.

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\Big[\frac{e^{i\pi x t}}{1 - ye^{i}\pi t}\Big] &= \frac{\mathfrak{Re}[e^{i\pi x t}(1 - ye^{-i\pi t})]}{|1 - ye^{i\pi t}|^2} \\ &= \frac{\cos \pi x t - y \cos \pi(x-1)t}{1 - 2y\cos \pi t + y^2}\end{aligned}$$

Connaissant $S[g](x,y)$ pour tout $0 < x < 1$, on en déduit $S[g](1-x,y)$ (puisque $0 < 1-x < 1$) puis $C[g](x,y)$:

$$C[g](x,y) = \frac{\pi(1-y)}{\sin \pi x} \int_0^1 \frac{\cos \pi x t + \cos \pi(1-x)t}{1 - 2y\cos \pi t + y^2}\,dt.$$

Partie B. Noyau de Poisson

8. Dans cette question, les deux paramètres $0 \leqslant y < 1$ et $t \in [0,1]$ sont fixés.

Il est clair que

$$|ye^{i\pi t}| = y < 1,$$

donc le quotient est bien défini et le calcul de sa partie réelle est (évidemment) classique.

$$\begin{aligned}\frac{1 + ye^{i\pi t}}{1 - ye^{i\pi t}} &= \frac{(1 + ye^{i\pi t})(1 - ye^{-i\pi t})}{(1 - y\cos \pi t)^2 + (y \sin \pi t)^2} \\ &= \frac{(1-y^2) + y(e^{i\pi t} - e^{-i\pi t})}{1 - 2y\cos \pi t + y^2}\end{aligned}$$

Comme $e^{i\pi t} - e^{-i\pi t} = 2i \sin \pi t \in i\mathbb{R}$, on a ainsi démontré que

$$\mathfrak{Re}\Big[\frac{1 + ye^{i\pi t}}{1 - ye^{i\pi t}}\Big] = \frac{1 - y^2}{1 - 2y\cos \pi t + y^2}.$$

9. Nous sommes dans les mêmes conditions qu'à la question précédentes : $0 \leqslant y < 1$ et $t \in [0,1]$ sont fixés.

❧ Comme on l'a remarqué plus haut, $|ye^{i\pi t}| < 1$, donc

$$\frac{1}{1 - ye^{i\pi t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ye^{i\pi t})^n$$

(somme géométrique). Il suffit ensuite de développer le produit.

$$\begin{aligned}\frac{1 + ye^{i\pi t}}{1 - ye^{i\pi t}} &= (1 + ye^{i\pi t}) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\pi t} y^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} y^n e^{in\pi t} + \sum_{n=1}^{+\infty} y^n e^{in\pi t} \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\pi t} y^n.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$P(t,y) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\cos(n\pi t)\, y^n.$$

(Cf le rappel qui précède le corrigé de **[6.]**.) Cette relation est vérifiée pour tout $0 \leqslant y < 1$ et prouve que $P(t,y)$ est bien développable en série entière en fonction de y sur $[0,1[$.

10. D'après **[8.]**, le dénominateur de $P(t,y)$ ne s'annule pas. La fonction

$$[t \mapsto P(t,y)]$$

est donc continue sur le segment $[0,1]$, ce qui prouve l'existence de l'intégrale.

❧ D'après **[9.]**, cette fonction s'écrit comme la somme d'une série de fonctions :

$$P(t,y) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t)$$

où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n(t) = 2y^n \cos n\pi t.$$

Dans cette question, le paramètre $0 \leqslant y < 1$ est fixé et le réel t varie dans le segment $[0,1]$. On ne considère donc plus que $P(t,y)$ est la somme d'une série entière (variable y) : c'est la somme d'une série trigonométrique (variable t).

❧ Chaque fonction v_n est continue sur le segment $[0,1]$ et donc intégrable sur cet intervalle.

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$,

$$|2y^n \cos n\pi t| \leqslant 2y^n$$

et comme $0 \leqslant y < 1$, la série géométrique $\sum y^n$ est convergente. Le majorant étant indépendant de t, on a ainsi démontré que la série de fonctions $\sum v_n$ convergeait normalement sur le segment $[0,1]$.

❧ On peut donc intégrer terme à terme :

$$\int_0^1 P(t,y)\,dt = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 v_n(t)\,dt.$$

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 v_n(t)\,dt = 2y^n \int_0^1 \cos n\pi t\,dt = 0.$$

Donc

$$\forall\, 0 \leqslant y < 1, \qquad \int_0^1 P(t,y)\,dt = 1.$$

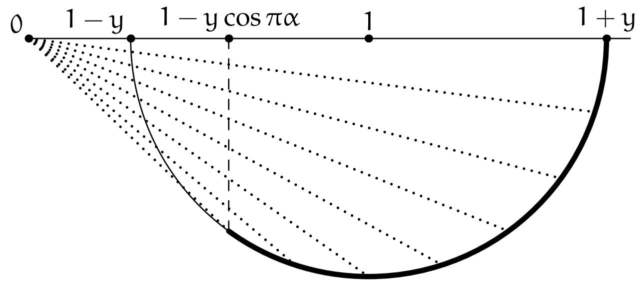
11. La fonction φ est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée :

$$\forall\, t \in [0,1], \qquad |\varphi(t)| \leqslant \|\varphi\|_\infty.$$

La fonction $[t \mapsto \cos \pi t]$ est décroissante sur $[0,1]$. Comme $0 \leqslant y < 1$, le dénominateur

$$1 - 2y\cos \pi t + y^2$$

est une fonction croissante et strictement positive de t.



Ça se voit !

Comme $1 - y^2 > 0$, le quotient

$$\frac{1-y^2}{1-2y\cos\pi t + y^2}$$

est une fonction décroissante et strictement positive de t. Ainsi,

$$\forall\, t \in [\alpha, 1], \qquad \left|\frac{(1-y^2)\varphi(t)}{1-2y\cos\pi t+y^2}\right| \leqslant \frac{(1-y^2)\|\varphi\|_\infty}{1-2y\cos\pi\alpha+y^2}.$$

On a obtenu un majorant indépendant de t (plus facile à intégrer !). Par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_\alpha^1 P(t,y)\varphi(t)\,dt\right| \leqslant (1-y^2)\frac{(1-\alpha)\|\varphi\|_\infty}{1-2y\cos\pi\alpha+y^2}.$$

Lorsque y tend vers 1, le dénominateur tend vers

$$2(1-\cos\pi\alpha) > 0$$

(puisque $0 < \alpha < 1$), donc le quotient tend vers 0 :

$$\lim_{y\to 1} \int_\alpha^1 P(t,y)\varphi(t)\,dt = 0.$$

❧ La fonction φ est continue sur le segment $[0,\alpha]$, donc elle est majorée :

$$\forall\, t \in [0,\alpha], \qquad |\varphi(t)| \leqslant M_\alpha = \sup_{0\leqslant u\leqslant\alpha} |\varphi(u)|.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^\alpha P(t,y)\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^\alpha P(t,y)|\varphi(t)|\,dt$$

(puisque $0 < \alpha$ et $P(t,y) \geqslant 0$). D'après l'encadrement précédent,

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha P(t,y)|\varphi(t)|\,dt &\leqslant M_\alpha \int_0^\alpha P(t,y)\,dt\\ &\leqslant M_\alpha \int_0^1 P(t,y)\,dt \quad (\text{car } P(t,y)\geqslant 0)\\ &\leqslant M_\alpha \qquad (\text{d'après } \textbf{[10.]})\end{aligned}$$

12. Considérons la fonction ψ définie par

$$\forall\, t \in [0,1], \qquad \psi(t) = \varphi(t) - \varphi(0).$$

Il est clair que ψ est continue sur $[0,1]$, on peut donc lui appliquer les résultats établis en **[11.]**.

❧ Fixons $\varepsilon > 0$.

Comme φ est continue en particulier en $t = 0$, alors il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [0,\alpha], \qquad |\varphi(t) - \varphi(0)| \leqslant \varepsilon/2.$$

On en déduit par passage à la borne supérieure que

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant\alpha} |\psi(u)| \leqslant \varepsilon/2$$

et donc que, d'après **[11.]**,

$$\left|\int_0^\alpha P(t,y)\psi(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon/2.$$

D'autre part, toujours d'après **[11.]**,

$$\lim_{y\to 0} \int_\alpha^1 P(t,y)\psi(t)\,dt = \psi(0) = 0,$$

donc il existe $0 < y_0 < 1$ tel que

$$\forall\, y_0 \leqslant y < 1, \qquad \left|\int_\alpha^1 P(t,y)\psi(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon/2.$$

Par la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire, on a démontré que

$$\forall\, y_0 \leqslant y < 1, \qquad \left|\int_0^1 P(t,y)\psi(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, on a démontré que

$$\lim_{y\to 1} \int_0^1 P(t,y)\psi(t)\,dt = 0.$$

❧ Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int_0^1 P(t,y)\psi(t)\,dt &= \int_0^1 P(t,y)\varphi(t)\,dt - \int_0^1 P(t,y)\varphi(0)\,dt\\ &= \int_0^1 P(t,y)\varphi(t)\,dt - \varphi(0)\end{aligned}$$

d'après **[10.]**. On en déduit que

$$\lim_{y\to 1} \int_0^1 P(t,y)\varphi(t)\,dt = \varphi(0).$$

Partie C. Application

13. D'après **[7.]**,

$$C[g](x,y) = \frac{\pi}{(1+y)\sin\pi x}\big[A(x,y) + A(1-x,y)\big].$$

14. Pour tout $0 < x < 1$, la fonction $[t \mapsto \cos\pi xt]$ est continue sur $[0,1]$. On peut donc appliquer le résultat établi en **[12.]**.

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad \lim_{y\to 1} A(x,y) = \cos(\pi x \times 0) = 1.$$

En particulier, en remplaçant x par $1-x \in\,]0,1[$,

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad \lim_{y\to 1} A(1-x,y) = 1.$$

On déduit enfin de **[13.]** que

$$\lim_{y\to 1} C[g](x,y) = \frac{\pi[1+1]}{(1+1)\sin\pi x} = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

15. Par définition, pour $0 < x < 1$ et $0 \leqslant y < 1$,

$$C[g](x,y) = \int_0^1 \frac{u^{x-1} + u^{-x}}{1+yu}\, du$$

et

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad I(x) = \int_0^1 \frac{u^{x-1} + u^{-x}}{1+u}\, du.$$

❧ Soit $0 < x < 1$, fixé. On considère la fonction Φ définie par

$$\forall\, 0 < u \leqslant 1,\ \forall\, 0 \leqslant y < 1, \quad \Phi(u,y) = \frac{u^{x-1} + u^{-x}}{1+yu}.$$

Par **[2.]**, on sait que, pour $0 \leqslant y < 1$, la fonction

$$[u \mapsto \Phi(u,y)]$$

est intégrable sur $]0,1]$.

Il est clair que, pour $0 < u \leqslant 1$,

$$\lim_{y\to 1} \Phi(u,y) = \frac{u^{x-1} + u^{-x}}{1+u}$$

et que cette limite est continue sur $]0,1]$ en fonction de u.

Enfin, quels que soient $0 < u \leqslant 1$ et $0 \leqslant y < 1$,

$$0 \leqslant \Phi(u,y) \leqslant u^{x-1} + u^{-x}$$

(le dénominateur de $\Phi(u,y)$ étant supérieur à 1). Le majorant trouvé est indépendant de y et, en tant que fonction de u, intégrable sur l'intervalle $]0,1]$ (d'après **[1.]**). La condition de domination est donc satisfaite.

On déduit du Théorème de continuité que l'intégrale

$$C[g](x,y) = \int_0^1 \Phi(u,y)\, du$$

tend vers $I(x)$ lorsque y tend vers 1.

D'après **[14.]**,

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad I(x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Pour tout $0 \leqslant y < 1$, la fonction

$$[t \mapsto P(t,y)]$$

est continue et positive sur $[0,1]$ et son intégrale est égale à 1. Il s'agit donc d'une ***densité de probabilité****.*
Si X est une variable aléatoire dont la loi est représentée par cette densité, alors l'intégrale étudiée au ***[11.]*** *est une espérance (Formule de transfert dans le cas d'une variable aléatoire à densité) :*

$$\int_0^1 P(t,y)\varphi(t)\, dt = \mathbf{E}\big(\varphi(X)\big).$$

La propriété démontrée au ***[12.]*** *signifie que la famille de ces densités de probabilité* ***"converge étroitement"*** *vers la mesure de Dirac au point 0.*

La densité $P(\cdot, y=0)$ est uniforme (fonction constante, égale à 1). Plus y se rapproche de 1, plus le graphe de $[t \mapsto P(t,y)]$ se déforme et se "concentre" au voisinage de $t = 0$.