EXERCICE 1.— On considère les fonctions u_n définies pour x réel et tout n assez grand par :

$$
\begin{array}{llll}
u_n(x) = x^n & u_n(x) = 2x^{n^2} & u_n(x) = (n+1)x^n & u_n(x) = n(n-1)x^{2n} \\
u_n(x) = \dfrac{1}{n}x^n & u_n(x) = (-2)^n x^n & u_n(x) = \exp(-1/n)x^n & u_n(x) = \dfrac{\sqrt{2}n}{n^2-1}x^{3n+2} \\
u_n(x) = (\sin n)x^n & u_n(x) = \dfrac{(n+1)^2}{n!}x^n & u_n(x) = \ell\text{n}(1-3/n)\, x^{2n} & u_n(x) = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n
\end{array}
$$

❧ Pour chaque suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donner une condition nécessaire et suffisante sur x pour que :

1. La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 ;
2. La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée ;
3. La série $\sum u_n(x)$ soit absolument convergente ;
4. La série $\sum u_n(x)$ soit grossièrement divergente.

❧ On note $I =]-\alpha, \alpha[$, un voisinage de 0 telle que la série $\sum u_n(x)$ soit absolument convergente. Calculer

$$M_n = \sup_{x\in I} \left|u_n(x)\right|$$

puis donner un équivalent de M_n lorsque n tend vers $+\infty$. Pour quelles valeurs de α la série $\sum M_n$ est-elle convergente ?

EXERCICE 2.— On considère les fonctions u_n définies sur l'intervalle I pour tout entier n assez grand par :

$$
\begin{array}{llll}
u_n(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2} & I =]0, +\infty[& u_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x} & I =]0, +\infty[\\
u_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} & I =]1, +\infty[& u_n(x) = \dfrac{2x}{x^2+n^2} & I =]-\infty, +\infty[\\
u_n(x) = \dfrac{n-1}{1+n^3}\sin nx & I =]-\infty, +\infty[& u_n(x) = e^{-2n}\cos(n^2x) & I =]-\infty, +\infty[\\
u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx} & I =]0, +\infty[& u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x} & I =]0, +\infty[
\end{array}
$$

❧ Calculer

$$M_n = \sup_{x\in I} \left|u_n(x)\right|$$

et étudier la convergence de la série $\sum M_n$.

❧ On fixe un segment $[A, B] \subset I$ et on pose

$$M'_n = \sup_{x\in[A,B]} \left|u_n(x)\right|.$$

Étudier la convergence de la série $\sum M'_n$.

NB : il n'est pas nécessaire de calculer la valeur exacte de M'_n, un encadrement (judicieux) suffit.