

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1 Si $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, alors X est aussi un vecteur propre de $\exp(A)$, associé à la valeur propre e^λ .

2 [93.4] Si $Q^{-1}AQ = T$, alors $Q^{-1} \cdot \exp(A) \cdot Q = \exp(T)$.

3 Si le polynôme caractéristique de A est scindé, alors le polynôme caractéristique de $\exp(A)$ est scindé lui aussi. En déduire l'égalité suivante.

$$\det[\exp(A)] = \exp(\operatorname{tr} A)$$

(NB : cette égalité est vraie pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, même lorsque le polynôme caractéristique χ_A n'est pas scindé.)

1 Par hypothèse,

$$AX = \lambda X.$$

On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k X = \lambda^k X$$

et donc que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k \right) \cdot X = \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \lambda^k \right) \cdot X. \quad (*)$$

1 Premier rappel de topologie : on considère une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on suppose que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de scalaires qui tend vers le scalaire ℓ .

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|u_k \cdot X - \ell \cdot X\| = |u_k - \ell| \cdot \|X\|.$$

Cette norme tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \cdot X = \ell \cdot X.$$

➤ Nous démontrerons que toutes les applications linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie sont continues. Or l'application $[\lambda \mapsto \lambda \cdot X]$ est linéaire ! Donc elle est continue et le résultat que nous avons démontré par le calcul des normes n'est donc qu'un cas d'application du Théorème de composition des limites.

1 Deuxième rappel de topologie : on suppose que l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ précédemment choisie sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on suppose que $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de matrices qui tend vers la matrice L .

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|M_k \cdot X - L \cdot X\| = \|(M_k - L) \cdot X\| \leq \|M_k - L\| \|X\|.$$

Par encadrement, cette norme tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k \cdot X = L \cdot X.$$

➤ Comme $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont tous les deux des espaces vectoriels de dimension FINIE, toutes les normes existant sur ces deux espaces sont équivalentes.

En supposant que la suite des matrices converge vers la matrice L pour la norme subordonnée à la norme choisie sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on suppose en fait que cette suite converge vers L pour une norme quelconque sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Par ailleurs, l'application $[M \mapsto MX]$ est linéaire ! Comme précédemment, elle est continue et le résultat que nous avons démontré par le calcul des normes n'est qu'un nouveau cas d'application du Théorème de composition des limites.

1 On peut alors déduire de (*) que

$$\exp(A) \cdot X = e^\lambda \cdot X$$

et comme $X \neq 0$ (par hypothèse, X est un vecteur propre de A), on en déduit que X est aussi un vecteur propre de $\exp(A)$ associé à e^λ .

2• Supposons que les deux matrices A et T soient semblables. Il existe donc une matrice inversible Q telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Q^{-1} A^k Q = T^k.$$

On en déduit que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad Q^{-1} \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k \right) Q = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} T^k.$$

Par définition [93.2], le second membre tend vers $\exp(T)$ et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k = \exp(A).$$

L'application $\Phi = [M \mapsto Q^{-1} M Q]$ est LINÉAIRE sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, espace vectoriel DE DIMENSION FINIE, donc elle est continue (voir les remarques précédentes). D'après le Théorème de composition des limites,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \Phi \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \Phi(A^k)$$

c'est-à-dire

$$Q^{-1} \cdot \exp(A) \cdot Q = \exp(T).$$

3• Si le polynôme caractéristique de A est scindé, alors A est trigonalisable. Elle est donc semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} u_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & * \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}.$$

On sait alors que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad T^k = \begin{pmatrix} u_1^k & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & * \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & u_n^k \end{pmatrix}$$

et on en déduit que (combinaison linéaire, puis passage à la limite coefficient par coefficient)

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{u_1} & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & * \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & e^{u_n} \end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente, la matrice $\exp(A)$ est semblable à $\exp(T)$. Ces deux matrices ont donc le même polynôme caractéristique, donc le polynôme caractéristique de $\exp(A)$ est scindé :

$$\chi_{\exp(A)} = \prod_{k=1}^n (X - e^{u_k}).$$

On peut être plus précis en considérant la multiplicité des valeurs propres de A . Si le polynôme caractéristique de A s'écrit sous la forme

$$\chi_A = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k},$$

alors

$$\chi_{\exp(A)} = \prod_{k=1}^r (X - e^{\lambda_k})^{m_k}.$$

Si les valeurs propres de A sont réelles, alors on peut en déduire les multiplicités des valeurs propres de $\exp(A)$.

En revanche, si les valeurs propres de A sont complexes, on risque des surprises : la fonction \exp n'est pas injective sur \mathbb{C} (elle est $2i\pi$ -périodique, je n'avais pas besoin de le rappeler), donc il se peut que $\exp(A)$ ait moins de valeurs propres que A ...

• Comme les matrices T et $\exp(T)$ sont triangulaires, on sait que

$$\operatorname{tr} T = \sum_{k=1}^n u_k \quad \text{et} \quad \det(\exp T) = \prod_{k=1}^n e^{u_k}.$$

Comme T et A sont semblables et que $\exp(T)$ et $\exp(A)$ sont semblables, on en déduit que

$$\det(\exp A) = \det(\exp T) = \exp(\operatorname{tr} T) = \exp(\operatorname{tr} A).$$