Solution I ❀ Matrices de Leslie

Partie A. Étude d'une matrice 2×2

1. Avec la trace et le déterminant, on obtient le polynôme caractéristique de A :

$$X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1).$$

La matrice A admet donc deux valeurs propres réelles :

$$\lambda = -1 \quad \text{et} \quad \mu = 2$$

(avec les notations de la question suivante).

2. Comme $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distinctes, on sait que les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

❧ Comme

$$A - 2I_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 32 \\ 1 & -8 \end{pmatrix},$$

il est clair que le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(A-2I_2)$ est dirigé par $(8,1)$.

❧ Comme

$$A + I_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 32 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

il est clair que $\mathrm{Ker}(A+I_2) = \mathbb{R}\cdot(4,-1)$.

❧ Avec la condition de normalisation,

$$U = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. a. Il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

Comme $AU = 2U$ et que $AV = -V$, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_n = 2^n \alpha U + (-1)^n \beta V.$$

3. b. Comme $\alpha \neq 0$ et que $(-1)^n = o(2^n)$ lorsque n tend vers $+\infty$, on déduit de la question précédente que

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n\alpha\cdot\frac{8}{9} \quad \text{et} \quad y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n\alpha\cdot\frac{1}{9}.$$

❧ On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n} = 2$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = 8.$$

Partie B. Modèle de Leslie

4. Le produit $s_1\cdots s_k$ est la proportion d'individus qui vivent assez longtemps pour passer de la classe initiale $\mathscr{C}_1$ à la classe $\mathscr{C}_k$. Comme f_k désigne le nombre moyen de descendants par individu de la classe $\mathscr{C}_k$, le produit

$$s_1\cdots s_k f_k$$

est le nombre moyen de descendants par individu, nés lorsque leur "parent" appartenait à la classe $\mathscr{C}_k$.

La somme R_0 est donc le nombre moyen de descendants par individu au cours de la vie de celui-ci.

5. a. Comme les nombres s_k et f_k sont tous strictement positifs, les colonnes de la matrice A sont échelonnées et la matrice A est inversible. Par conséquent, 0 n'est pas une valeur propre de A.

5. b. Par hypothèse, $AX = \lambda X$. Cette équation se traduit sur la première ligne par

$$\sum_{k=1}^{d} f_k x_k = \lambda x_1 \tag{1}$$

et sur les lignes suivantes par

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant d, \quad s_{k-1}x_{k-1} = \lambda x_k. \tag{2}$$

Comme $\lambda \neq 0$ **[5.a.]**, on en déduit que

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant d, \quad x_k = \frac{s_{k-1}}{\lambda}\cdot x_{k-1}$$

et donc que

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant d, \quad x_k = \frac{s_{k-1}s_{k-2}\cdots s_1}{\lambda^{k-1}}\cdot x_1. \tag{3}$$

Par conséquent, si $x_1 = 0$, alors tous les x_k sont nuls et le vecteur propre X estt le vecteur nul : c'est impossible !

❧ En injectant les relations (3) dans (1), on obtient

$$f_1x_1 + \sum_{k=2}^{d}\frac{f_k s_{k-1}s_{k-2}\cdots s_1}{\lambda^{k-1}}\cdot x_1 = \lambda x_1.$$

Or $\lambda \neq 0$ et $x_1 \neq 0$, donc

$$\frac{f_1}{\lambda} + \sum_{k=2}^{d}\frac{s_1\cdots s_{k-1}f_k}{\lambda^k} = 1$$

en divisant par $\lambda x_1 \neq 0$.

6. La fonction

$$\varphi = \left[\lambda \mapsto \frac{f_1}{\lambda} + \sum_{k=2}^{d}\frac{s_1\cdots s_{k-1}f_k}{\lambda^k}\right]$$

est clairement continue sur $]0,+\infty[$. Comme les s_k et les f_k sont tous strictement positifs, la fonction φ tend vers $+\infty$ au voisinage de 0 et est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. De plus, elle tend évidemment vers 0 au voisinage de $+\infty$.

D'après le Théorème de la bijection monotone, la fonction φ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. En particulier, il existe un, et un seul, réel $\mu \in\,]0,+\infty[$ tel que $\varphi(\mu) = 1$.

❧ D'après **[5.b.]**, si λ est une valeur propre de A, alors $\varphi(\lambda) = 1$.

Réciproquement, supposons que $\varphi(\lambda) = 1$. Choisissons un réel $x_1 \neq 0$ et définissons le vecteur X avec (3). Les coordonnées de X vérifient clairement (2) et comme $\varphi(\lambda) = 1$, elles vérifient aussi (1), donc $AX = \lambda X$.

Comme $x_1 \neq 0$, alors $X \neq 0$, donc X est bien un vecteur propre de A associé à λ.

❧ On a ainsi démontré que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A si, et seulement si, $\varphi(\lambda) = 1$.

L'étude de φ a donc établi que la matrice A admettait une, et une seule, valeur propre strictement positive.

7. D'après ce qui précède, $\varphi(\mu) = 1$ et $\varphi(1) = R_0$.

Comme φ est strictement décroissante,

— si $\mu = 1$, alors $1 = \varphi(\mu) = \varphi(1) = R_0$;
— si $\mu < 1$, alors $1 = \varphi(\mu) > \varphi(1) = R_0$;
— si $\mu > 1$, alors $1 = \varphi(\mu) < \varphi(1) = R_0$.

On a examiné trois cas mutuellement exclusifs et il n'y a pas d'autre possibilité. Par conséquent, ces trois implications sont en fait des équivalences.

8. Comme $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres de A, alors la dimension de chaque sous-espace propre associé à une valeur propre λ est égale au nombre de vecteurs de $\mathscr{B}$ associés à λ.

D'après l'énoncé, les vecteurs propres $V_2, \ldots, V_d$ sont associés à des valeurs propres λ_k telles que $|\lambda_k| < \mu$, donc

$$\operatorname{Ker}(A - \mu I_d) = \mathbb{R} \cdot U \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker}(A - \mu I_d) = 1.$$

9. Comme au **[3.a.]**,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0 = \alpha\mu^n \cdot U + \sum_{\ell=2}^{d} \beta_\ell \lambda_\ell^n \cdot V_\ell.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad x_{n,k} = \alpha\mu^n u_k + \sum_{\ell=2}^{d} \beta_\ell \lambda_\ell^n v_{\ell,k}.$$

Comme $|\lambda_\ell| < \mu$, alors

$$\lambda_\ell^n \underset{n\to+\infty}{=} o(\mu^n).$$

Comme $\alpha \neq 0$ (par hypothèse) et que $u_k \neq 0$ (par **[5.b.]** appliqué au vecteur propre U),

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\mu^n u_k. \tag{4}$$

On en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1,k}}{x_{n,k}} = \mu.$$

10. Par (4),

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad p_k = \alpha u_k.$$

11. D'après **[7.]** et la question précédente,
— si $R_0 = 1$, alors $\mu = 1$ et la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers αU (autrement dit, la population se *stabilise*) ;
— si $R_0 > 1$, alors $\mu > 1$ et toutes les suites $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$ (*explosion démographique*) ;
— si $R_0 < 1$, alors $\mu < 1$ et la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul (*extinction démographique*).

Solution II ❀ Étude d'un jeu de hasard

Partie A. Calcul du gain moyen

1. a. Par hypothèse, la variable aléatoire T suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ avec $0 < p < 1$. D'après le cours,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(T = n) = q.p^{n-1} > 0$$

puisque $0 < q = 1 - p < 1$.

1. b. D'après la question précédente, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{[T=n]}(G = k)$ est bien définie.

Posons

$$p_k = \mathbf{P}_{[T=n]}([G = k] \cup [G = n - M] \cup [G = n - 1]).$$

Comme $k \notin \{n - M,\ n - 1\}$, les trois évènements $[G = k]$, $[G = n - M]$ et $[G = n - 1]$ sont deux à deux distincts et donc la probabilité p_k est égale à

$$\mathbf{P}_{[T=n]}(G = k) + \mathbf{P}_{[T=n]}(G = n - M) + \mathbf{P}_{[T=n]}(G = n - 1).$$

Comme toute probabilité est inférieure à 1, On a donc

$$\mathbf{P}_{[T=n]}(G = k) + \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = p_k \leqslant 1$$

et donc

$$\mathbf{P}_{[T=n]}(G = k) = 0$$

puisqu'une probabilité est toujours positive.

1. c. Conditionnellement à $[T = n]$, la variable aléatoire G ne prend que deux valeurs avec une probabilité strictement positive. Elle est donc presque sûrement bornée (pour la mesure $\mathbf{P}_{[T=n]}$) et donc d'espérance finie.

❧ Par définition de l'espérance,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{[T=n]}(G) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\, \mathbf{P}_{[T=n]}(G = k) \\
&= \sum_{k\in\{n-M,n-1\}} k\, \mathbf{P}_{[T=n]}(G = k) \\
&= \frac{n-M}{n} + \frac{(n-1)^2}{n} = n - 1 + \frac{1-M}{n}.
\end{aligned}$$

> *Il faut bien comprendre que l'espérance conditionnelle de X sachant A est définie exactement comme l'espérance de X, à ceci près que la mesure de probabilité $\mathbf{P}$ est remplacée dans la formule par la mesure de probabilité $\mathbf{P}_A$.*

2. a. Comme G et T sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, la différence $(T-G)$ est encore une variable aléatoire discrète et par conséquent

$$[T - G = M] \in \mathcal{A}.$$

❧ La famille $([T = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements et **[1.a.]** $\mathbf{P}(T = n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la Formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A \cap [T = n]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}_{[T=n]}(A)\, \mathbf{P}(T = n).$$

2. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} T(\omega) - G(\omega) = M \\ T(\omega) = n \end{cases} \iff \begin{cases} T(\omega) = n \\ G(\omega) = n - M \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A \cap [T = n]) &= \mathbf{P}(T = n, G = n - M) \\
&= \mathbf{P}_{[T=n]}(G = n - M)\, \mathbf{P}(T = n) \\
&= \frac{pq^{n-1}}{n}
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbf{P}(A) = \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot q^n.$$

Or on sait que

$$\forall\, x \in\,]-1,1[\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\cdot x^n = -\ln(1-x)$$

et comme $0 < q = 1-p < 1$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(A) = -\frac{p}{q}\ln(1-q) = \frac{p}{q}\ln\frac{1}{p}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \big\{(k,n),\ k \in \mathbb{Z}\big\}.$$

Il est clair que la famille $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une *partition dénombrable* de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$.

Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la sous-famille

$$(u_{k,n})_{(k,n)\in I_n}$$

est sommable et la série de terme général

$$s_n = \sum_{(k,n)\in I_n} |u_{k,n}|$$

est convergente. On peut donc déduire du Théorème de Fubini que la famille

$$(u_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*}$$

est sommable.

❧ Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose maintenant

$$J_k = \big\{(k,n),\ n \in \mathbb{N}^*\big\}.$$

Il est encore clair que la famille $(J_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une partition dénombrable de $Z\times\mathbb{N}^*$.

Comme la famille $(u_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable, alors chaque sous-famille

$$(u_{k,n})_{(k,n)\in J_k}$$

est sommable (quel que soit $k \in \mathbb{Z}$), ce qui prouve que la somme

$$\sigma_k = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{(k,n)\in J_k} u_{k,n}$$

est bien définie.

Par ailleurs, le Théorème de Fubini nous assure que la famille $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de ces sommes partielles est sommable et que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_k = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{(k,n)\in I_n} u_{k,n}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_{k,n}\Big).$$

4. Pour $(k,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, posons

$$\begin{aligned} u_{k,n} &= k\,\mathbf{P}\big([G=k]\cap[T=n]\big)\\ &= k\,\mathbf{P}_{[T=n]}(G=k)\ \mathbf{P}(T=n). \end{aligned}$$

D'après **[1.b.]**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille

$$(u_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}}$$

ne compte que deux termes non nuls : elle est donc sommable et

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_{k,n} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\,\mathbf{P}(G=k, T=n)\\ &= \mathbf{E}_{[T=n]}(G)\,\mathbf{P}(T=n). \end{aligned}$$

En reprenant les notations de **[3.]**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_n = \Big(\frac{|n-M|}{n} + \frac{(n-1)^2}{n}\Big)\cdot pq^{n-1}.$$

On en déduit que

$$s_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(nq^{n-1}).$$

Or la série $\sum nq^{n-1}$ converge absolument (car $0 < q < 1$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^{n-1}$ est égal à 1), donc la série $\sum s_n$ est convergente.

On peut alors déduire de **[3.]** que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la somme

$$\sigma_k = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{k,n}$$

est bien définie. C'est tout sauf une surprise puisque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{k,n} = k\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(G=k, T=n) = k\,\mathbf{P}(G=k)$$

par σ-additivité de $\mathbf{P}$ (on décompose l'évènement $[G=k]$ sur le système complet associé à la variable aléatoire T).

Mais on sait aussi par **[3.]** que la famille $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable, ce qui prouve que G est d'espérance finie et que :

$$\mathbf{E}(G) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\,\mathbf{P}(G=k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sigma_k.$$

Et on sait enfin par **[3.]** que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sigma_k = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_{k,n},$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{E}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{E}_{[T=n]}(G)\,\mathbf{P}(T=n).$$

5. D'après **[4.]** et **[1.c.]**,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(G) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(n-1+\frac{1-M}{n}\Big)\cdot pq^{n-1}\\ &= p\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} - 1 + \frac{(1-M)p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{n}\\ &= \frac{p}{(1-q)^2} - 1 - \frac{(1-M)p}{q}\ln(1-q) \end{aligned}$$

donc

$$\mathbf{E}(G) = \frac{q}{p} + \frac{(1-M)p}{q}\ln\frac{1}{p}.$$

❧ On peut aussi écrire l'espérance sous forme factorisée.

$$\mathbf{E}(G) = \frac{p}{q}\ln\frac{1}{p}\Big(\frac{q^2}{p^2\ln(1/p)} + 1 - M\Big)$$

Comme $0 < p < 1$, le premier facteur est strictement positif et par conséquent, l'espérance $\mathbf{E}(G)$ est positive si, et seulement si,

$$\Big(\frac{q^2}{p^2 \ln(1/p)} + 1 - M\Big) \geqslant 0$$

c'est-à-dire si

$$\frac{q^2}{p^2 \ln(1/p)} \geqslant M - 1.$$

6. a. On peut se contenter du code suivant - mais si on veut obtenir exactement la figure de l'énoncé, il faut décommenter toutes les lignes commentées.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(p):
    return -(1-p)**2*(p**2*np.log(p))**(-1)

# plt.figure(figsize=(4,3))
L_p = np.linspace(0.25, 0.75)
plt.plot(L_p, f(L_p))
# plt.ylim(0, 7)
# pos_etq = [0.1*i for i in range(3, 8)]
# etq = ["0,{}".format(i) for i in range(3, 8)]
# plt.xticks(pos_etq, etq)
# plt.grid()
# plt.savefig("cp2407.pdf")
```

6. b. D'après **[5.]**, l'espérance $\mathbf{E}(G)$ est positive si, et seulement si, l'entier M vérifie

$$M \leqslant 1 + f(p).$$

Pour $p = 0,3$, on lit $f(p) \approx 4,5$, il faut donc choisir $M \leqslant 5$ pour que l'espérance $\mathbf{E}(G)$ soit positive.

6. c. Pour $M = 7$, on déduit de **[5.]** que l'espérance $\mathbf{E}(G)$ est positive si, et seulement si, $f(p) \geqslant M - 1 = 6$, c'est-à-dire si $p \leqslant 0,25$ (environ) d'après la figure.

6. d. Pour $p \geqslant 0,55$ (environ), on voit sur la figure que

$$\forall\, M \geqslant 2, \quad f(p) \leqslant 1 \leqslant M - 1$$

et donc $\mathbf{E}(G) \leqslant 0$.

REMARQUE.— Petit retour sur le contexte.

Si la cible est assez facile à atteindre, le joueur va l'atteindre assez rapidement et le jeton marqué (qui rapporte M euros) sera mélangé avec un assez petit nombre de pièces d'un euro : il sera donc plutôt facile de tirer ce jeton. Pour que le forain fasse un bénéfice, il devra donc fixer M assez bas et veiller en particulier **[6.d.]** à ce que la probabilité p d'atteindre la cible ne dépasse par 50% !

En revanche, si la cible est assez difficile à atteindre, le joueur l'atteindra après un assez grand nombre de tentatives et le jeton marqué sera mélangé avec de nombreuses pièces d'un euro. Cette situation est la meilleure pour le forain puisqu'elle combine un triple attrait psychologique pour le joueur :

— atteindre une cible difficile à atteindre ;
— réussir à piocher un jeton gagnant parmi de nombreuses pièces ;
— remporter une somme M assez importante

et offre en même temps la possibilité d'assurer au forain un bénéfice moyen positif : avec $p = 10\%$ et $M = 20$ euros, le forain s'assure un bénéfice moyen de plus de 4 euros par partie !

Partie B. Estimation d'un paramètre

7. a. Par construction, la variable aléatoire S_N est la somme de N variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. D'après le cours, la loi de S_N est la loi binomiale $\mathscr{B}(N, p)$.

7. b. La fonction $[p \mapsto p(1-p)]$ est polynomiale de degré 2 et ses racines sont évidemment 0 et 1. Comme le coefficient dominant est négatif, la fonction est positive entre ses racines et le sommet de la parabole correspond au maximum de la fonction. Son sommet est situé au milieu de ses racines, c'est-à-dire pour $p = {}^1\!/_2$. Donc

$$\forall\, 0 < p < 1, \quad 0 \leqslant p(1-p) \leqslant \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{4}.$$

7. c. Comme S_N suit une loi de Bernoulli, on sait que

$$\mathbf{E}(S_N) = Np \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(S_N) = Npq.$$

Comme l'espérance est linéaire et que la variance est quadratique, on en déduit que

$$\mathbf{E}\Big(\frac{S_N}{N}\Big) = p \quad \text{et} \quad \mathbf{V}\Big(\frac{S_n}{N}\Big) = \frac{pq}{N} \leqslant \frac{1}{4N}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\Big(\Big|\frac{S_N}{N} - \mathbf{E}\Big(\frac{S_N}{N}\Big)\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbf{V}(S_N/N)}{\varepsilon^2}$$

et par conséquent

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\Big(\Big|\frac{S_N}{N} - p\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{1}{4N\varepsilon^2}.$$

8. D'après le cours sur les séries entières,

$$\operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \exp(t^2/2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2)^n}{2^n n!}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Or $(2n)! = 2^n n!$ pour $n = 0$ et aussi pour $n = 1$, tandis que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad 2^n n! = \prod_{k=1}^{n} (2k) < \prod_{\ell=1}^{2n} \ell = (2n)!.$$

On en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} t \leqslant \exp(t^2/2).$$

9. On sait que la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$. En particulier, quel que soit $\alpha \in [0, 1]$,

$$\exp\big((1-\alpha)(-t) + \alpha t\big) \leqslant (1-\alpha)e^{-t} + \alpha e^{t}.$$

Avec $|x| \leqslant 1$, on peut prendre

$$\alpha = \frac{1+x}{2} \in [0,1].$$

On a alors

$$1-\alpha = \frac{1-x}{2}$$

et

$$\alpha t + (1-\alpha)(-t) = (2\alpha - 1)t = xt,$$

d'où

$$e^{xt} \leqslant \frac{1+x}{2}\, e^{t} + \frac{1-x}{2}\, e^{-t}.$$

10. a. Par hypothèse, la variable aléatoire U est presque sûrement bornée. Quel que soit $\omega \in \Omega$, comme $t \geqslant 0$,

$$-1 \leqslant U(\omega) \leqslant 1 \implies e^{tU(\omega)} \leqslant e^{t}.$$

On en déduit que

$$[|U| \leqslant 1] \subset [0 < e^{tU} \leqslant e^{t}]$$

et donc que la variable aléatoire e^{tU} est elle aussi presque sûrement bornée :

$$1 = \mathbf{P}\big(|U| \leqslant 1\big) \leqslant \mathbf{P}(0 \leqslant e^{tU} \leqslant e^{t}) \leqslant 1.$$

Comme toute variable aléatoire presque sûrement bornée est une variable aléatoire d'espérance finie, on en déduit que U et e^{tU} sont des variables aléatoires d'espérance finie.

❧ D'après **[9.]**, pour tout $\omega \in \Omega$, si $|U(\omega)| \leqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} e^{tU(\omega)} &\leqslant \frac{1+U(\omega)}{2}\, e^{t} + \frac{1-U(\omega)}{2}\, e^{-t} \\ &= \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t.U(\omega). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\big[|U| \leqslant 1\big] \subset \big[e^{tU} \leqslant \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t.U\big]$$

et comme $[|U| \leqslant 1]$ est un évènement presque sûr,

$$[e^{tU} \leqslant \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t.U]$$

est aussi un évènement presque sûr. Donc

$$\mathbf{E}(e^{tU}) \leqslant \mathbf{E}(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t.U) = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t.\,\mathbf{E}(U).$$

10. b. Comme X_1 suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, il est clair que

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad U(\omega) \in \{-p;\ 1-p\} \subset [-1,1]$$

et que $\mathbf{E}(U) = 0$. D'après **[10.a.]**,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{E}(e^{tU}) \leqslant \operatorname{ch} t.$$

10. c. Par définition,

$$S_N - Np = \sum_{k=1}^{n} (X_k - p)$$

et par conséquent

$$e^{t(S_N - Np)} = \prod_{k=1}^{N} e^{t(X_k - p)}.$$

Comme les X_k sont indépendantes et de même loi, on déduit du lemme des coalitions que les variables $e^{t(X_k-p)}$ sont indépendantes et de même loi. Comme elles sont d'espérance finie **[10.a.]**, on en déduit que

$$\mathbf{E}(e^{t(S_N-Np)}) = \prod_{k=1}^{N} \mathbf{E}(e^{t(X_k-p)}) = \big[\mathbf{E}(e^{t(X_1-p)})\big]^{N}.$$

D'après **[10.b.]** et **[8.]**,

$$0 \leqslant \mathbf{E}(e^{t(X_1-p)}) \leqslant e^{t^2/2}$$

et donc (produits de réels positifs)

$$\mathbf{E}(e^{t(S_N-Np)}) \leqslant e^{Nt^2/2}.$$

11. a. Comme $t > 0$ et $N \geqslant 1$, la fonction $\big[x \mapsto e^{Ntx}\big]$ est strictement croissante. Par conséquent, pour tout $\omega \in \Omega$

$$\frac{S_N(\omega)}{N} - p \geqslant \varepsilon \iff e^{t[S_N(\omega)-Np]} \geqslant e^{Nt\varepsilon}$$

ou, en termes d'évènements,

$$\Big[\frac{S_N}{N} - p \geqslant \varepsilon\Big] = [e^{t(S_N-Np)} \geqslant e^{Nt\varepsilon}].$$

On a démontré **[10.c.]** que $e^{t(S_N-Np)}$ était une variable aléatoire d'espérance finie et comme c'est évidemment une variable aléatoire positive, on peut déduire de l'inégalité de Markov que

$$\mathbf{P}\big(e^{t(S_N-Np)} \geqslant e^{Nt\varepsilon}\big) \leqslant \frac{\mathbf{E}(e^{t(S_N-Np)})}{e^{Nt\varepsilon}}.$$

On déduit alors de la majoration **[10.c.]** que

$$\mathbf{P}\Big(\frac{S_N}{N} - p \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{e^{Nt^2/2}}{e^{Nt\varepsilon}}.$$

11. b. L'inégalité établie au **[11.a.]** nous donne un minorant d'une fonction de t, nous pouvons donc passer à la borne inférieure :

$$\mathbf{P}\Big(\frac{S_N}{N} - p \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \inf_{t>0} \exp\big(-Nt\varepsilon + Nt^2/2\big).$$

L'expression

$$-Nt\varepsilon + Nt^2/2 = \frac{Nt}{2}(-2\varepsilon + t)$$

est polynomiale de degré 2, s'annule pour $t = 0$ et pour $t = 2\varepsilon$ et son coefficient dominant est strictement positif. Par conséquent, cette expression est minimale pour $t = \varepsilon > 0$.

Comme exp est croissante, on en déduit que

$$\min_{t>0} \exp\big(-Nt\varepsilon + Nt^2/2\big) = \exp\big(-N\varepsilon^2/2\big)$$

et donc que

$$\mathbf{P}\Big(\frac{S_N}{N} - p \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \exp(-N\varepsilon^2/2).$$

12. Au **[10.b.]**, on peut remplacer la variable $U = X_1 - p$ par la variable $U = p - X_1$ (qui vérifie aussi les propriétés voulues). Cela revient à remplacer $(S_N - Np)$ par $-(S_N - Np)$ dans la suite. On en déduit que

$$\mathbf{P}\Big(-\frac{S_N}{N} + p \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \exp(-N\varepsilon^2/2).$$

Il est clair que

$$\Big[\Big|\frac{S_N}{N} - p\Big| \geqslant \varepsilon\Big] = \Big[\frac{S_N}{N} - p \geqslant \varepsilon\Big] \sqcup \Big[-\frac{S_N}{N} + p \geqslant \varepsilon\Big]$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{S_N}{N} - p\Big| \geqslant \varepsilon\Big) &= \mathbf{P}\Big(\frac{S_N}{N} - p \geqslant \varepsilon\Big) + \mathbf{P}\Big(-\frac{S_N}{N} + p \geqslant \varepsilon\Big)\\ &\leqslant 2\exp(-N\varepsilon^2/2).\end{aligned}$$

13. L'inégalité du **[12.]** est une variante de l'inégalité élémentaire du **[7.c.]** : on choisit le réel $\varepsilon > 0$ assez petit et l'entier N assez grand pour que $2\exp(-N\varepsilon^2/2)$ soit assez petit.

En passant au complémentaire, on obtient

$$\mathbf{P}\Big(\frac{S_N}{N} - \varepsilon \leqslant p \leqslant \frac{S_N}{N} + \varepsilon\Big) \geqslant 1 - 2\exp(-N\varepsilon^2/2).$$

Le quotient S_N/N est la proportion de chiffres égaux à 1 dans l'échantillon (*fréquence empirique*, mesurée expérimentalement) et le réel ε est une marge d'erreur : le paramètre p de la loi de Bernoulli (*fréquence théorique*, inconnue) est ici approché à $\pm\varepsilon$ près par la fréquence empirique.

La minoration précédente nous assure que l'encadrement

$$\frac{S_N}{N} - \varepsilon \leqslant p \leqslant \frac{S_N}{N} + \varepsilon$$

est vrai avec une probabilité supérieure à $1 - 2e^{-N\varepsilon^2/2}$ (*niveau de confiance*).

On vérifie sans peine que

$$1 - 2e^{-N\varepsilon^2/2} \geqslant \gamma \iff \varepsilon \geqslant \sqrt{\frac{-2}{N}\ln\frac{1-\gamma}{2}}.$$

Le code calcule la fréquence empirique à partir de l'échantillon et, connaissant le nombre N d'observations ainsi que le niveau de confiance γ souhaité (= la valeur de l'argument `confiance`), il calcule la plus petite valeur possible de ε telle que

$$1 - 2e^{-N\varepsilon^2/2} \geqslant \gamma.$$

On dispose alors du meilleur encadrement possible (= le plus étroit) de p pour le niveau de confiance souhaité.

REMARQUE.— Il est intéressant de comparer cet encadrement avec l'encadrement déduit de l'inégalité **[7.c.]** : c'est seulement pour des niveaux de confiance élevés (supérieurs à 98% environ) que l'encadrement élémentaire du **[7.c.]** est moins précis que l'encadrement du **[12.]** !

Solution III ❀ Lois indéfiniment divisibles

Partie A. Variables aléatoires bornées

1. Soit $m \geqslant 2$, un entier. Il existe une famille $(Y_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Dirac en a/m :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant m, \quad \mathbf{P}(Y_k = a/m) = 1.$$

L'évènement

$$\Omega_m = \bigcap_{k=1}^{m} [Y_k = a/m]$$

est un évènement presque sûr (en tant qu'intersection de m évènements presque sûrs) et

$$\forall\, \omega \in \Omega_m, \quad \sum_{k=1}^{m} Y_k(\omega) = m \times \frac{a}{m} = a.$$

Donc $\Omega_m \subset [Y_1 + \cdots + Y_= a]$ et comme $\mathbf{P}(\Omega_m) = 1$,

$$\mathbf{P}(Y_1 + \cdots + Y_m = a) = 1 = \mathbf{P}(X = a),$$

donc les deux variables aléatoires X et $Y_1 + \cdots + Y_m$ ont même loi (la loi de Dirac en a).

> *En considérant l'évènement $\Omega_m \cap [X = a]$, on montre que les deux variables aléatoires sont en fait égales presque sûrement (ce qui est plus fort que l'égalité en loi).*

2. a. Tout d'abord, pour toute variable aléatoire U définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$,

$$\big[|U| > M\big] = [U > M] \sqcup [U < -M]$$

et en particulier

$$\mathbf{P}(U > M) \leqslant \mathbf{P}(|U| > M).$$

❧ Pour $1 \leqslant i \leqslant m$, on note

$$A_i = [Y_i > M/m] \in \mathcal{A}.$$

Pour tout $\omega \in A_1 \cap \cdots \cap A_m$,

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant m, \quad Y_i(\omega) > \frac{M}{m}$$

et, en sommant,

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i(\omega) > M.$$

Comme $Y_1 + \cdots + Y_m$ et X ont même loi, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\Big) &\leqslant \mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{m} Y_i > M\Big) && \text{(inclusion)}\\ &\leqslant \mathbf{P}(X > M). && \text{(même loi)}\end{aligned}$$

Comme les variables aléatoires Y_i sont indépendantes et de même loi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\Big) &= \prod_{i=1}^{m} \mathbf{P}(A_i) && \text{(évènements indépendants)}\\ &= \big[\mathbf{P}(A_i)\big]^m. && \text{(de même probabilité)}\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$0 \leqslant \big[\mathbf{P}(A_i)\big]^m = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\Big) \leqslant \mathbf{P}(X > M). \tag{5}$$

Or $\mathbf{P}(|X| \leqslant M) = 1$, donc $\mathbf{P}(|X| > M) = 0$ (passage au complémentaire) et donc $\mathbf{P}(X > M) = 0$ (remarque préliminaire). On déduit alors de (5) que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant M, \quad \mathbf{P}(A_i) = 0$$

et, par passage au complémentaire, que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant M, \quad \mathbf{P}\Big(Y_i \leqslant \frac{M}{m}\Big) = 1.$$

❧ On peut mener le même raisonnement avec les évènements

$$A'_i = [Y_i < -{}^{M}/_{m}] \in \mathcal{A}.$$

On démontre alors que

$$0 \leqslant \big[\mathbf{P}(A'_i)\big]^m = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{m} A'_i\Big) \leqslant \mathbf{P}(X < -M). \tag{6}$$

On conclut de même : comme $\mathbf{P}(|X| \leqslant M) = 1$, alors $\mathbf{P}(X < -M) = 0$ et donc

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant M, \quad \mathbf{P}\Big(Y_i \geqslant \frac{-M}{m}\Big) = 1.$$

❧ Pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, l'évènement

$$\Big[|Y_i| \leqslant \frac{M}{m}\Big]$$

est l'intersection de deux évènements presque sûrs :

$$\Big[Y_i \leqslant \frac{M}{m}\Big] \cap \Big[Y_i \geqslant \frac{-M}{m}\Big],$$

donc il est lui aussi presque sûr :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant m, \quad \mathbf{P}\Big(|Y_i| \leqslant \frac{M}{m}\Big) = 1.$$

2. b. Comme la variable aléatoire X est bornée, son espérance et sa variance sont bien définies.

La variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances (Pythagore), donc

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X) &= \mathbf{V}(Y_1 + \cdots + Y_m) && \text{(même loi)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mathbf{V}(Y_i) && \text{(indépendance)} \\ &= m\,\mathbf{V}(Y_1). && \text{(même loi)} \end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{V}(Y_1) = \mathbf{E}(Y_1^2) - \big[\mathbf{E}(Y_1)\big]^2 \leqslant \mathbf{E}(Y_1^2).$$

La fonction $\big[t \mapsto t^2\big]$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\big|Y_i(\omega)\big| \leqslant \frac{M}{m} \iff Y_i(\omega)^2 \leqslant \frac{M^2}{m^2}.$$

L'égalité des évènements entraîné l'égalité des probabilités :

$$\mathbf{P}\big(|Y_i| \leqslant M/m\big) = \mathbf{P}(Y_i^2 \leqslant M^2/m^2)$$

et d'après **[2.a.]**,

$$\mathbf{P}(Y_1^2 \leqslant M^2/m^2) = 1.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{E}(Y_1^2) \leqslant \frac{M^2}{m^2}$$

et finalement

$$\mathbf{V}(X) \leqslant m\,\mathbf{V}(Y_1) \leqslant \frac{M^2}{m}.$$

2. c. L'encadrement précédent est vrai pour tout entier $m \geqslant 2$, alors que $\mathbf{V}(X)$ est un réel positif indépendant de m. En faisant tendre m vers $+\infty$, on en déduit que

$$\mathbf{V}(X) = 0$$

et donc que la variable aléatoire X est presque sûrement constante.

3. Une variable aléatoire qui suit une loi binomiale est presque sûrement bornée (elle ne prend qu'un nombre *fini* de valeurs).

On vient de démontrer **[2.c.]** qu'une variable aléatoire bornée dont la loi est indéfiniment divisible était nécessairement constante. Pour $n \geqslant 1$ et $0 < p < 1$, une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n,p)$ n'est pas constante, donc la loi $\mathscr{B}(n,p)$ n'est pas indéfiniment divisible.

Partie B. Variables de Poisson

4. Comme somme de n variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction $Y_1 + \cdots + Y_n$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on sait que *la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$.

❧ Comme Y_i suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda_i)$, on connaît sa fonction génératrice :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_i(t) = \exp\big[\lambda_i(t-1)\big].$$

Comme les variables aléatoires Y_i sont indépendantes, alors les variables aléatoires t^{Y_i} sont indépendantes. Pour $t \in [0,1]$, les variables aléatoires t^{Y_i} sont bornées (elles prennent leurs valeurs entre 0 et 1), donc ce sont des variables aléatoires d'espérance finie.

On en déduit que

$$\mathbf{E}\Big(\prod_{i=1}^{n} t^{Y_i}\Big) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}(t^{Y_i}) = \prod_{i=1}^{n} G_i(t)$$

et donc que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\mathbf{E}\big(t^{Y_1+\cdots+Y_n}\big) = \exp\Big((t-1)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big).$$

On reconnaît ici la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

Par conséquent, la variable aléatoire $Y_1 + \cdots + Y_n$ suit la loi de Poisson

$$\mathscr{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n).$$

5. Soit X, une variable aléatoire discrète suivant la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

Soit $m \geqslant 2$, un entier. On considère une famille $(Y_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi, qui suivent toutes la loi de Poisson $\mathscr{P}({}^{\lambda}/_{m})$.

Il existe toujours un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel un tel échantillon de v.a.i.i.d. est bien défini !
Ce théorème, que tout le monde applique tout le temps sans y prendre garde, est dû à Kolmogorov (dans sa version la plus générale) et... ne figure pas au programme.

Par **[4.]**, la somme $Y_1 + \cdots + Y_m$ suit la loi de Poisson de paramètre

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda}{m} = \lambda$$

donc X et $Y_1 + \cdots + Y_m$ ont même loi.

On a ainsi démontré que la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ était indéfiniment divisible, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

6. a. Soit $m \geqslant 2$, un entier. On considère une famille

$$(U_{k,i})_{1\leqslant k\leqslant m,\ 1\leqslant i\leqslant r}$$

de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, en supposant que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant m,\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \quad U_{k,i} \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_i/m)$$

et on pose

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant m, \quad Y_k = \sum_{i=1}^{r} iU_{k,i}.$$

Il est clair que

$$\sum_{k=1}^{m} Y_k = \sum_{i=1}^{r} i \sum_{k=1}^{m} U_{k,i}. \tag{7}$$

❧ D'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires Y_k sont indépendantes.

❧ Pour $2 \leqslant k \leqslant m$, les variables aléatoires $U_{1,i}$ et $U_{k,i}$ ont même loi (loi de Poisson de paramètre λ_i/m). De plus, les variables aléatoires

$$U_{1,1}, \ldots, U_{1,r}$$

sont indépendantes et les variables aléatoires

$$U_{k,1}, \ldots, U_{k,r}$$

sont indépendantes (sous-famille d'une famille de variables aléatoires indépendantes). Donc les deux vecteurs aléatoires

$$(U_{1,1}, \ldots, U_{1,r}) \quad \text{et} \quad (U_{k,1}, \ldots, U_{k,r})$$

ont même loi et par conséquent les deux variables aléatoires Y_1 et Y_k ont même loi (images de deux vecteurs aléatoires de même loi par une même fonction).

❧ Ainsi, le vecteur $(Y_1, \ldots, Y_m)$ est un échantillon de v.a.i.i.d.

❧ Considérons maintenant les variables aléatoires

$$V_i = \sum_{k=1}^{m} U_{k,i}.$$

Le lemme des coalitions nous assure à nouveau que les variables aléatoires V_i sont indépendantes. On déduit de **[4.]** que V_i suit la loi de Poisson de paramètre λ_i (en tant que somme de m variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Poisson de paramètre λ_i/m).

On a observé précédemment (7) que

$$\sum_{k=1}^{m} Y_k = \sum_{i=1}^{m} iV_i,$$

ce qui prouve que $Y_1 + \cdots + Y_m$ suit la même loi que X.

On a ainsi démontré que la loi de X était indéfiniment divisible.

6. b. Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (somme de r variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$), nous allons comparer sa fonction génératrice à la fonction génératrice d'une loi de Poisson.

❧ Soit $t \in [0, 1]$. Comme les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_r$ sont indépendantes, les variables aléatoires

$$t^{X_1},\ t^{2X_2}, \ldots,\ t^{rX_r}$$

sont indépendantes et bornées, donc

$$G_X(t) = \mathbf{E}\Big(\prod_{i=1}^{r} t^{iX_i}\Big) = \prod_{i=1}^{r} \mathbf{E}\big((t^i)^{X_i}\big) = \prod_{i=1}^{r} e^{\lambda_i(t^i-1)}.$$

Autrement dit,

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad G_X(t) = \exp\Big(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(t^i - 1)\Big)$$

et nous cherchons s'il existe un réel $\mu > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad G_X(t) = \exp\big(\mu(t - 1)\big)$$

(fonction génératrice de la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$).

❧ Avec $t = 0$, on devrait avoir

$$\mu = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i.$$

Par linéarité de l'espérance, on devrait avoir aussi

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{r} i\, \mathbf{E}(X_i)$$

et donc (propriété des lois de Poisson)

$$\mu = \sum_{i=1}^{r} i\lambda_i.$$

Comme les λ_i sont strictement positifs et que $r \geqslant 2$,

$$\sum_{i=1}^{r} i\lambda_i > \sum_{i=1}^{r} \lambda_i,$$

donc la loi de X n'est pas une loi de Poisson.

Il existe donc des lois de probabilité sur $\mathbb{N}$ qui sont indéfiniment divisibles et qui ne sont pas des lois de Poisson (ni des lois de Dirac **[1.]***).*

Partie C. Séries de variables aléatoires

7. a. On décompose A dans le système complet d'évènements (B, B^c) :

$$A = (A \cap B) \sqcup (A \cap B^c)$$

donc

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap B^c).$$

De même, en décomposant B dans le système complet d'évènements (A, A^c) :

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A^c \cap B).$$

On en déduit par soustraction que

$$\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B^c) - \mathbf{P}(A^c \cap B)$$

et on conclut par inégalité triangulaire :

$$\big|\,\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B)\big| \leqslant \mathbf{P}(A \cap B^c) + \mathbf{P}(A^c \cap B).$$

7. b. Pour $t \in [0,1]$, les réels $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ sont les sommes de deux séries absolument convergentes. Par inégalité triangulaire,

$$\big|G_X(t) - G_Y(t)\big| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \big|\,\mathbf{P}(X = n) - \mathbf{P}(Y = n)\big| t^n.$$

D'après **[7.a.]**, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\big|\,\mathbf{P}(X = n) - \mathbf{P}(Y = n)\big|$$

est majoré par

$$\mathbf{P}(X = n, Y \neq n) + \mathbf{P}(X \neq n, Y = n)$$

si bien que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\big|G_X(t) - G_Y(t)\big| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n, Y \neq n) + \mathbf{P}(X \neq n, Y = n).$$

> *Le majorant est la somme d'une série de terme général positif : si cette série divergeait, alors la somme serait égale à $+\infty$ et la majoration aurait quand même un sens (à défaut d'avoir un intérêt, puisque le membre de gauche est évidemment majoré par 2).*
> *C'est la raison pour laquelle on n'a pas cherché à savoir si la série convergeait. (On va bientôt vérifier qu'elle converge. Patience !)*

❧ On décompose l'évènement $[X \neq Y]$ dans les systèmes complets d'évènements associés aux deux variables aléatoires X et Y :

$$\begin{aligned}[X \neq Y] &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} [X = n, Y \neq n] \\ &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} [X \neq n, Y = n].\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a une union dénombrable d'évènements deux à deux disjoints. Par σ-additivité de $\mathbf{P}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \neq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n, Y \neq n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X \neq n, Y = n).\end{aligned}$$

> *Comme d'habitude, la σ-additivité nous a servi à démontrer sans aucun effort la convergence d'une série.*

❧ On a ainsi démontré que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|G_X(t) - G_Y(t)\big| \leqslant 2\,\mathbf{P}(X \neq Y).$$

8. a. Par définition,

$$\omega \in Z_n \iff \exists\, i \geqslant n, \quad U_i(\omega) \neq 0$$

donc

$$Z_n = \bigcup_{i \geqslant n} [U_i \neq 0]. \tag{8}$$

Comme U_i est une variable aléatoire, chaque $[U_i \neq 0]$ est un évènement, donc Z_n est une union dénombrable d'évènements :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad Z_n \in \mathcal{A}.$$

❧ D'après (8),

$$Z_n = [U_n \neq 0] \cup \bigcup_{i \geqslant n+1} [U_i \neq 0] = [U_n \neq 0] \cup Z_{n+1}.$$

La suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite décroissante d'évènements :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} \subset Z_n.$$

❧ On déduit aussi de (8) par σ-sous-additivité de $\mathbf{P}$ que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}(Z_n) \leqslant \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbf{P}(U_i \neq 0).$$

> *Le majorant est encore la somme d'une série de terme général positif. Pour les raisons évoquées en **[7.b.]**, on n'a pas à se soucier de la convergence de la série pour écrire cette inégalité - au pire, on écrit une relation qui n'a pas d'intérêt.*

Comme la série $\sum \mathbf{P}(U_i \neq 0)$ est supposée convergente, le majorant est le reste d'une série convergente (reste d'ordre $(n-1)$), donc il tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(Z_n) = 0.$$

8. b. Soit $\omega \in \Omega$. L'ensemble

$$I(\omega) = \big\{i \in \mathbb{N}^* \,:\, U_i(\omega) \neq 0\big\}$$

est fini si, et seulement si, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall\, i \geqslant n, \quad U_i(\omega) = 0$$

c'est-à-dire si

$$\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{i \geqslant n} [U_i = 0] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Z_n^c.$$

❧ On s'intéresse donc en fait à l'ensemble

$$\Omega_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Z_n^c,$$

qui est bien un évènement (les Z_n appartiennent à la tribu $\mathcal{A}$ et toute tribu est stable par passage au complémentaire et par union dénombrable).

❧ Nous allons maintenant démontrer que cet évènement est presque sûr. Par passage au complémentaire,

$$\mathbf{P}(\Omega_1) = 1 - \mathbf{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} Z_n\Big).$$

Or **[8.a.]** la famille $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements, donc

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} Z_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(Z_n)$$

par continuité décroissante. Cette limite est nulle **[8.a.]**, donc

$$\mathbf{P}(\Omega_1) = 1.$$

On a démontré que : presque sûrement, il n'existe qu'un nombre fini d'indices $i \in \mathbb{N}^*$ tels que $U_i \neq 0$.

8. c. Pour tout ω dans Ω_1, la série $\sum U_i(\omega)$ ne compte qu'un nombre *fini* de termes non nuls **[8.b.]**, donc elle converge.

Comme la probabilité de cet évènement est égale à 1, on peut conclure que la série de variables aléatoires $\sum U_i$ converge presque sûrement.

❧ En tant que somme (d'un nombre presque sûrement fini) d'entiers, $S(\omega) \in \mathbb{N}$, donc S est une application à valeurs (presque sûrement) dans $\mathbb{N}$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, si $S(\omega) = m$, alors la série $\sum U_i(\omega)$ converge et donc ω appartient à Ω_1. On en déduit que

$$[S = m] = [S = m] \cap \Omega_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [S = m] \cap Z_n^c.$$

Par définition de Z_n, si $\omega \in Z_n^c$, alors

$$\forall\, i \geqslant n, \quad U_i(\omega) = 0$$

et en particulier

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{n-1} U_i(\omega) = S_{n-1}(\omega).$$

Par conséquent, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$[S = m] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [S_{n-1} = m] \cap Z_n^c.$$

Les S_{n-1} sont des variables aléatoires à valeurs entières (y compris S_0 qui est, par convention, identiquement nulle), donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, m \in \mathbb{N}, \quad [S_{n-1} = m] \in \mathcal{A}.$$

Comme les Z_n sont aussi des évènements, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, m \in \mathbb{N}, \quad [S_{n-1} = m] \cap Z_n^c \in \mathcal{A}$$

(intersection de deux évènements) et finalement

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \quad [S = m] \in \mathcal{A}$$

(union dénombrable d'évènements).

> *La fonction S n'est pas définie sur Ω mais seulement sur l'évènement Ω_1, de probabilité 1. On peut prolonger S à Ω en lui donnant une valeur arbitraire (0, $+\infty$, $\pi^2/6$...) sur Ω_1^c.*
> *Ce prolongement, effectué sur un évènement négligeable, ne change pas les fréquences d'apparition des valeurs de S et ne change donc pas la loi de S. C'est pourquoi on évite de prêter trop d'attention à cette question.*

❧ En appliquant **[7.b.]** aux variables aléatoires S_n et S, on obtient

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0,1], \quad \big|G_S(t) - G_{S_n}(t)\big| \leqslant 2\,\mathbf{P}(S \neq S_n).$$

On dispose ainsi d'un majorant indépendant de $t \in [0,1]$.

Comme

$$S(\omega) = S_n(\omega) + \sum_{i=n+1}^{+\infty} U_i(\omega)$$

et que les $U_i(\omega)$ sont tous *positifs*,

$$S(\omega) \neq S_n(\omega) \iff \exists\, i \geqslant n+1, \quad U_i(\omega) \neq 0.$$

Ainsi

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad [S \neq S_n] = Z_{n+1}$$

et d'après **[8.a.]**, le majorant $2\,\mathbf{P}(S \neq S_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On a ainsi démontré que la suite des fonctions génératrices G_{S_n} convergeait uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction génératrice G_S.

9. a. Par définition de la loi de Poisson,

$$\mathbf{P}(X_i \neq 0) = 1 - \mathbf{P}(X_i = 0) = 1 - e^{-\lambda_i}.$$

Comme la série $\sum \lambda_i$ converge, les λ_i tendent vers 0 et donc

$$\mathbf{P}(X_i \neq 0) \underset{i\to+\infty}{\sim} \lambda_i.$$

Par comparaison de séries *de terme général positif*, la série $\sum \mathbf{P}(X_i \neq 0)$ est convergente.

9. b. D'après **[9.a.]**, on peut appliquer les résultats établis en **[8.]** aux variables aléatoires $U_i = X_i$.

❧ La somme S est donc définie presque sûrement et, en tant que variable aléatoire à valeurs entières, elle est caractérisée par sa fonction génératrice.

D'après **[4.]**,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in [0,1], \quad G_{S_n}(t) = e^{(t-1)(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}.$$

D'après **[8.c.]**,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_S(t) = \lim_{n\to+\infty} G_{S_n}(t) = e^{(t-1)\Lambda}.$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi de Poisson $\mathscr{P}(\Lambda)$, donc la variable aléatoire S suit la loi $\mathscr{P}(\Lambda)$.