Chapitre 16 - Calcul différentiel — [24.3, 28.3, 46.1]

❧ **Notations et préliminaires topologiques**
On note comme d'habitude $O = (0,0)$ l'origine du plan ; on pose

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad V = [x \neq 0] \cap [y \neq 0].$$

Tout ensemble fini est fermé, donc la partie U est un ouvert (en tant que complémentaire d'une partie fermée).

Les ensembles $[x \neq 0]$ et $[y \neq 0]$ sont ouverts puisque ce sont les images réciproques respectives de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par les applications continues (polynomiales !)

$$[(x,y) \mapsto x] \quad \text{et} \quad [(x,y) \mapsto y]\,.$$

La partie V est donc ouverte en tant qu'intersection de deux ouverts.

Il est clair que la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$$

est définie sur U.

❧ **Régularité de f sur l'ouvert V**
On sait que les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et que les applications $[t \mapsto |t|]$ et $[t \mapsto {}^1\!/_t]$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Les composées

$$\begin{array}{rcccl} V & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x & \longmapsto & |x| \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcccl} V & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y & \longmapsto & |y| \end{array}$$

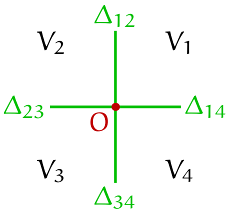
sont donc de classe $\mathscr{C}^\infty$. La somme de deux applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V. Par conséquent, la composée

$$\begin{array}{rcccl} V & \longrightarrow & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & |x|+|y| & \longmapsto & \frac{1}{|x|+|y|} \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V.

La fonction (polynomiale) $[(x,y) \mapsto xy]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V. Par produit, la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V.

❧ L'ouvert V est l'union de quatre quarts de plan ouverts V_1, V_2, V_3 et V_4 sur lesquels on peut calculer les dérivées partielles de f.



▶ Pour tout point $M = (x,y) \in V_1$,

$$f(M) = \frac{xy}{x+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{y^2}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{x^2}{(x+y)^2}.$$

▶ Pour tout point $M = (x,y) \in V_2$,

$$f(M) = \frac{xy}{-x+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{y^2}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{-x^2}{(x-y)^2}.$$

▶ Pour tout point $M = (x,y) \in V_3$,

$$f(M) = \frac{-xy}{x+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{-y^2}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{-x^2}{(x+y)^2}.$$

▶ Pour tout point $M = (x,y) \in V_4$,

$$f(M) = \frac{xy}{x-y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{-y^2}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{x^2}{(x-y)^2}.$$

✍ *Il faut penser à utiliser les symétries de f pour éviter de faire plusieurs fois le même calcul ou presque !*

❧ **Régularité de f sur l'ouvert U**
La fonction $[t \mapsto |t|]$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Les composées

$$\begin{array}{rcccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x & \longmapsto & |x| \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y & \longmapsto & |y| \end{array}$$

sont donc continues. La somme de deux applications de classe continues sur U est continue sur U. Par conséquent, la composée

$$\begin{array}{rcccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & |x|+|y| & \longmapsto & \frac{1}{|x|+|y|} \end{array}$$

est continue sur U.

La fonction (polynomiale) $[(x,y) \mapsto xy]$ est continues sur U. Par produit, la fonction f est donc continue sur U.

✍ *Deux problèmes se posent donc.*
— *Peut-on prolonger la fonction f, qui est continue sur U, en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier ?*
— *La fonction f, qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V, est-elle aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U (qui contient l'ouvert V) ?*

❧ **Prolongement par continuité**
On prolonge la fonction f à $\mathbb{R}^2$ en posant $f(O) = 0$.

✍ *On choisit cette valeur* après *avoir fait les calculs qui suivent, on ne la choisit surtout pas par hasard !*

✍ *Pour justifier la continuité de f au point O, il faut définir une norme sur $\mathbb{R}^2$. Peu importe laquelle : sur $\mathbb{R}^2$, espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc le choix de la norme n'aura aucune conséquence sur la continuité du prolongement. Il s'agit de choisir la norme qui rendra les calculs aussi commodes que possible.*

On choisir de munir l'espace $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique. Autrement dit, on passe en coordonnées polaires : pour tout point $M \neq O$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$M = (r\cos\theta,\ r\sin\theta) \qquad \text{où} \qquad r = \|\mathbf{OM}\|.$$

On en déduit que

$$\forall\, M \neq O, \quad \big|f(M) - f(O)\big| = r \cdot \frac{|\cos\theta \sin\theta|}{|\cos\theta| + |\sin\theta|} \leqslant \frac{r}{m_0} = \frac{\|\mathbf{OM}\|}{m_0}$$

où on a posé

$$m_0 = \min_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2} |\cos\theta| + |\sin\theta| > 0.$$

En effet, la fonction $[\theta \mapsto |\cos\theta| + |\sin\theta|]$ est strictement positive (le sinus et le cosinus ne peuvent pas s'annuler simultanément), continue et $\pi/2$-périodique, donc elle atteint un minimum m_0 strictement positif (puisque la fonction ne prend que des valeurs strictement positives).

L'encadrement ainsi obtenu prouve que

$$\lim_{\|\mathbf{OM}\| \to 0} f(M) = f(O)$$

et donc que la fonction f, telle que nous l'avons prolongée, est continue au point O.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

✍ *Toute fonction différentiable est continue, mais toute fonction continue n'est pas différentiable.*

Il est donc naturel de se demander si ce prolongement de f, qui est continu au point O, est aussi différentiable au point O.

❧ **Différentiabilité à l'origine**

✍ *Par définition, la fonction f est différentiable au point O si, et seulement si, elle admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de O.*

On sait de plus que le seul développement limité possible est de la forme

$$f(O+h) \underset{h=(x,y)\to 0}{=} f(O) + x\frac{\partial f}{\partial x}(O) + y\frac{\partial f}{\partial y}(O) + o(\|h\|).$$

Nous allons donc d'abord calculer les dérivées partielles avant de vérifier si nous avons bien un développement limité à l'ordre 1.

Pour tout $t \neq 0$,

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

donc les deux dérivées partielles de f sont définies en O et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = \frac{\partial f}{\partial y}(O) = 0.$$

Comme $f(O) = 0$, il reste donc à vérifier si

$$f(O+h) \underset{h\to 0}{=} o(\|h\|).$$

✍ *Comme pour la continuité, le calcul sur les ordres de grandeur impose de choisir une norme sur $\mathbb{R}^2$.*

Nous conservons la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$ pour calculer en coordonnées polaires. Comme on l'a déjà vu,

$$f(O+h) = r \cdot \frac{|\cos\theta \sin\theta|}{|\cos\theta| + |\sin\theta|}$$

et comme le facteur de $r = \|h\|$ est indépendant de r, il ne peut pas tendre vers 0 lorsque r tend vers 0. Par conséquent,

$$f(O+h) \underset{h\to 0}{=} \mathcal{O}(h) \quad \text{mais} \quad f(O+h) \underset{h\to 0}{\neq} o(h).$$

Par conséquent, la fonction f n'est pas différentiable au point O.

Variante

On peut aussi raisonner par l'absurde.

Supposons que f soit différentiable au point O. Alors l'application linéaire tangente $df(O)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ et cette forme linéaire est alors caractérisée par l'image de la base canonique (e_1, e_2) :

$$df(O)(e_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(O) = 0, \qquad df(O)(e_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(O) = 0.$$

Par conséquent, la forme linéaire $df(O)$ est identiquement nulle.

Considérons maintenant le vecteur $u = (1,1)$. On sait que la dérivée de f au point O suivant u peut se déduire de l'application linéaire tangente :

$$D_u(f)(O) = df(O)(u) = 0$$

(puisque l'application linéaire tangente est identiquement nulle).

Mais si on revient à la définition de la dérivée suivant u, on obtient

$$D_u(f)(O) = \lim_{t\to 0} \frac{f(O+t\cdot u)-f(O)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{2|t|},$$

ce qui est absurde (la limite à gauche diffère de la limite à droite).

Par conséquent, l'application f n'est pas différentiable au point O.

❧ **Différentiabilité sur U**

✍ *Pour démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, il nous suffit d'étudier f sur les quatre demi-axes ouverts de coordonnées (on sait déjà que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V).*

Dans ce but, nous allons bien entendu appliquer le Théorème fondamental :

- *dans un premier temps, nous allons vérifier que les dérivées partielles de f sont bien définies en chaque point M_0 de V ;*
- *ensuite, nous allons vérifier que les dérivées partielles de f sont continues en chaque point M_0 de V.*

Le premier point est très facile, il ne demande que de revenir à la définition des dérivées partielles.

Le second point est plus délicat et il impose une fois de plus de choisir une norme sur $\mathbb{R}^2$ pour étudier la limite.

❧ Nous noterons Δ_{14} (resp. Δ_{12}, resp. Δ_{23}, resp. Δ_{34}), la demi-droite ouverte qui sépare les quarts de plan V_1 et V_4 (resp. V_1 et V_2, resp. V_2 et V_3, resp. V_3 et V_4).

Il s'agit de vérifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, sachant qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V, et donc d'étudier f au voisinage des points M_0 appartenant à l'une de ces quatre demi-droites Δ_{ij}.

❧ La fonction f admet deux dérivées partielles en chacun de ces points.

► Si $M_0 \in \Delta_{14} \cup \Delta_{23}$, alors $M_0 = (x_0, 0)$ avec $x_0 \neq 0$ et, pour tout $t \neq 0$ assez petit,

$$\frac{f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{e}_1) - f(M_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t, 0) - f(x_0, 0)}{t} = 0,$$
$$\frac{f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{e}_2) - f(M_0)}{t} = \frac{f(x_0, t) - f(x_0, 0)}{t} = \frac{x_0}{x_0 + |t|}.$$

En faisant tendre t vers 0, on en déduit que les dérivées partielles sont définies et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 1.$$

► Si $M_0 \in \Delta_{12} \cup \Delta_{34}$, alors $M_0 = (0, y_0)$ avec $y_0 \neq 0$ et, pour tout $t \neq 0$ assez petit,

$$\frac{f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{e}_1) - f(M_0)}{t} = \frac{f(t, y_0) - f(0, y_0)}{t} = \frac{y_0}{|t| + y_0},$$
$$\frac{f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{e}_2) - f(M_0)}{t} = \frac{f(0, y_0 + t) - f(0, y_0)}{t} = 0.$$

En faisant tendre t vers 0, on en déduit que les dérivées partielles sont définies et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0.$$

❧ Il reste à démontrer que les deux dérivées partielles de f sont continues en chaque point M_0 considéré.

Pour éviter de faire plusieurs fois presque la même chose, nous allons nous restreindre aux points $M_0 \in \Delta_{14}$, de coordonnées $(x_0, 0)$ avec $x_0 > 0$.

Pour étudier la continuité, nous allons choisir la norme produit (la norme euclidienne canonique n'est pas plus simple).

À ce sujet, on rappelle que, pour tout point $M = (x, y)$, le vecteur $\mathbf{h} = \mathbf{M_0M}$ est égal à $(x - x_0,\ y)$. Par conséquent, la norme produit de ce vecteur est définie par

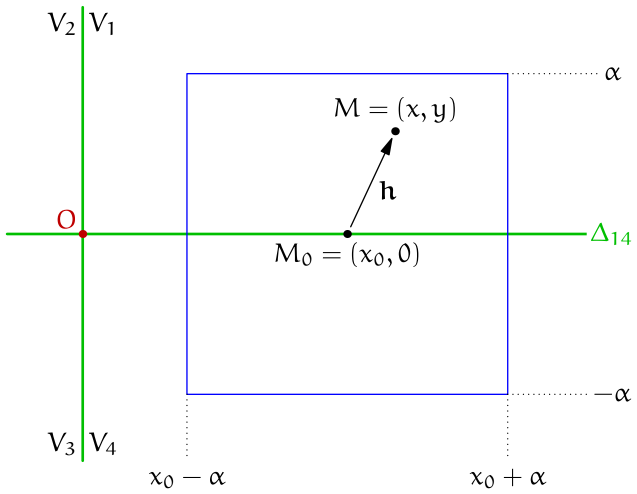
$$\|\mathbf{M_0M}\| = \max\{|x - x_0|,\ |y|\}$$

et nous utiliserons les deux encadrements suivants.

$$|x - x_0| \leqslant \|\mathbf{M_0M}\| \qquad |y| \leqslant \|\mathbf{M_0M}\|$$

❧ Puisqu'il s'agit d'étudier f au voisinage du point M_0, nous allons choisir un réel $\alpha > 0$ tel que $0 < \alpha < x_0$ et nous restreindre aux points $M = (x, y)$ tels que $\|\mathbf{M_0M}\| \leqslant \alpha$.

Il s'agit des points M situés à l'intérieur du carré bleu sur la figure ci-dessous. On constate qu'il faudra distinguer trois cas : $M \in V_1$ (c'est-à-dire $y > 0$) ; $M \in \Delta_{12}$ (c'est-à-dire $y = 0$) et $M \in V_4$ (c'est-à-dire $y < 0$).



❧ Étudions la continuité de la première dérivée partielle.

▶ Pour $M = (x, y) \in V_1$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right| = \frac{y^2}{(x+y)^2} \leqslant \frac{\|\mathbf{M_0M}\|^2}{(x_0-\alpha)^2}$$

puisque $0 < x_0 - \alpha \leqslant x + y$ (car $0 < x_0 - \alpha \leqslant x$ et $y > 0$).

▶ Pour $M = (x, y) \in V_4$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right| = \frac{y^2}{(x-y)^2} \leqslant \frac{\|\mathbf{M_0M}\|^2}{(x_0-\alpha)^2}$$

puisque $0 < x_0 - \alpha \leqslant x - y$ (car $0 < x_0 - \alpha \leqslant x$ et $y < 0$).

▶ Pour $M = (x, 0) \in \Delta_{14}$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right| = 0.$$

Bref : pour tout point M tel que $\|\mathbf{M_0M}\| \leqslant \alpha$ avec $0 < \alpha < x_0$, on a démontré que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right| \leqslant \frac{\|\mathbf{M_0M}\|^2}{(x_0-\alpha)^2}.$$

Lorsque le point M tend vers le point M_0, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur reste constant. Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$$

et donc que la première dérivée partielle est continue au point M_0.

❧ On reprend la même démarche pour la seconde dérivée partielle.

▶ Pour $M = (x, y) \in V_1$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right| = \frac{|2xy + y^2|}{(x+y)^2} \leqslant \frac{[2(x_0+\alpha)+\alpha] \cdot \|\mathbf{M_0M}\|}{(x_0-\alpha)^2}$$

puisque $0 < x \leqslant x_0 + \alpha$, $0 < y \leqslant \alpha$ et $0 < x_0 - \alpha \leqslant x + y$ (comme plus haut).

▶ Pour $M = (x, y) \in V_4$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right| = \frac{|2xy - y^2|}{(x-y)^2} \leqslant \frac{[2(x_0+\alpha)+\alpha] \cdot \|\mathbf{M_0M}\|}{(x_0-\alpha)^2}$$

puisque $0 < x \leqslant x_0 + \alpha$, $0 < |y| \leqslant \alpha$ et $0 < x_0 - \alpha \leqslant x - y$.

▶ Pour $M = (x, 0) \in \Delta_{14}$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right| = 0.$$

À nouveau, pour tout point M tel que $\|\mathbf{M_0M}\| \leqslant \alpha$ avec $0 < \alpha < x_0$, on a démontré que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right| \leqslant \frac{2x_0 + 3\alpha}{(x_0-\alpha)^2} \cdot \|\mathbf{M_0M}\|.$$

Le premier facteur est indépendant de M. On en déduit par encadrement que

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$$

et donc que la seconde dérivée partielle est continue au point M_0.

❧ D'après le Théorème fondamental, la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ en chaque point de la demi-droite Δ_{14}.

❧ En répétant la démarche sur les trois autres demi-droites, on peut conclure : la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U.