

### Trigonalisation de $A$

- On vérifie sans peine que le polynôme caractéristique de  $A$  est égal à

$$P_0 = (X - 3)^2(X - 1).$$

- Le sous-espace propre  $\text{Ker}(A - I_3)$  est donc une droite et comme

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on peut remarquer que  $C_2 - C_3 = 0$  et en déduire que

$$\text{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1 \quad \text{où} \quad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Le sous-espace caractéristique  $\text{Ker}(A - 3I_3)^2$  est un plan et comme le rang de la matrice

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, le sous-espace propre  $\text{Ker}(A - 3I_3)$  est une droite vectorielle :

$$\text{Ker}(A - 3I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est strictement inférieure à la dimension de l'espace, la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.*

*Comme son polynôme caractéristique est scindé, elle est néanmoins trigonalisable.*

- La matrice

$$(A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

nous donne une équation cartésienne du sous-espace caractéristique :

$$\text{Ker}(A - 3I_3)^2 = [y - z = 0].$$

*Si un vecteur du sous-espace caractéristique  $\text{Ker}(A - \lambda I_n)^m$  est un vecteur propre de  $A$ , c'est nécessairement un vecteur propre associé à  $\lambda$ .*

Choisissons un vecteur  $\varepsilon_3$  dans ce sous-espace caractéristique, en veillant à ce que ce vecteur ne soit pas un vecteur propre de  $A$  : ce vecteur doit vérifier l'équation cartésienne sans être proportionnel au vecteur  $(1, 0, 0)$ . Le vecteur

$$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

convient à l'évidence.

Posons maintenant

$$\varepsilon_2 = (A - 3I_3)\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Par hypothèse,  $\varepsilon_3 \in \text{Ker}(A - 3I_3)^2$  et  $(A - 3I_3)\varepsilon_3 \neq 0$ .

On en déduit que  $(A - 3I_3)\varepsilon_2 = (A - 3I_3)^2\varepsilon_3 = 0$  et donc que

$$\varepsilon_2 \in \text{Ker}(A - 3I_3) \subset \text{Ker}(A - 3I_3)^2.$$

☞ On aurait pu remarquer que  $\varepsilon_3$  appartenait au sous-espace caractéristique

$$\text{Ker}(A - 3I_3)^2$$

et que ce sous-espace est stable par  $A$  (en tant que noyau d'un polynôme en  $A$ ) pour en déduire que  $\varepsilon_2$  appartenait aussi à ce sous-espace caractéristique.

Comme  $\varepsilon_2$  est un vecteur propre et que  $\varepsilon_3$  n'est pas un vecteur propre, ce deux vecteurs ne sont pas proportionnels. Par conséquent, le couple  $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une famille libre de deux vecteurs dans le sous-espace caractéristique

$$\text{Ker}(A - 3I_3)^2.$$

Comme ce sous-espace est un plan, on en déduit que  $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une base de ce plan.

☞ Le raisonnement qui précède ne dépend pas du vecteur  $\varepsilon_3$  choisi, il est strictement théorique.

☛ D'après le Théorème de décomposition des noyaux, comme  $P_0$  est un polynôme annulateur de  $A$  (Théorème de Cayley-Hamilton) et que les facteurs  $(X - 3)^2$  et  $(X - 1)$  sont premiers entre eux,

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - I_3) \oplus \text{Ker}(A - 3I_3)^2.$$

Par conséquent, en concaténant la "famille"  $(\varepsilon_1)$ , qui est une base du sous-espace propre  $\text{Ker}(A - I_3)$ , avec la famille  $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ , qui est une base du sous-espace caractéristique  $\text{Ker}(A - 3I_3)^2$ , on obtient une base

$$\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

de  $\mathbb{R}^3$ .

☛ Récapitulons ce qu'on a décidé pour construire la base  $\mathcal{B}$ .

$$\begin{aligned} A\varepsilon_1 &= \varepsilon_1 && \text{(vecteur propre associé à 1)} \\ A\varepsilon_2 &= 3 \cdot \varepsilon_2 && \text{(vecteur propre associé à 3)} \\ A\varepsilon_3 &= 3\varepsilon_3 + \varepsilon_2 && \text{(définition du vecteur } \varepsilon_2) \end{aligned}$$

Notons enfin  $f$ , l'endomorphisme représenté par la matrice  $A$  dans la base canonique.

Dans la base  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ , la matrice de  $f$  est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comme  $A$  et  $J$  représente le même endomorphisme  $f$  dans deux bases différentes, ces deux matrices sont semblables.

☞ La matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{B}$  s'obtient en écrivant en colonnes les vecteurs de  $\mathcal{B}$ .

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après la formule de changement de base,

$$J = P^{-1}AP.$$

On va voir par la suite que la connaissance de la matrice  $P$  est inutile.

### Puissances de $A$ avec division euclidienne

☞ La connaissance d'un polynôme annulateur scindé permet de calculer assez facilement les puissances d'une matrice. Méthode à maîtriser !

☛ Comme  $P_0$  est un polynôme annulateur de degré 3, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe un unique couple  $(Q_k, R_k)$  de polynômes tels que

$$X^k = P_0Q_k + R_k \quad \text{avec} \quad \deg R_k \leq 2. \quad (1)$$

Il existe donc trois réels  $a_k, b_k$  et  $c_k$  tels que

$$R_k = a_k X^2 + b_k X + c_k.$$

On obtient deux relations en substituant les racines de  $P_0$  à  $X$  dans la division euclidienne (1).

$$\begin{cases} a_k + b_k + c_k = 1 \\ 9a_k + 3b_k + c_k = 3^k \end{cases}$$

Comme  $P_0$  possède une racine double, on dérive (1) :

$$kX^{k-1} = P_0'Q_k + P_0Q_k' + R_k' \quad \text{avec} \quad R_k' = 2a_k X + b_k$$

et en substituant la racine double à  $X$  dans cette égalité, on obtient une troisième relation.

$$6a_k + b_k = k3^{k-1}$$

• Il s'agit donc de résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} a_k + b_k + c_k = 1 \\ 8a_k + 2b_k = 3^k - 1 \\ 6a_k + b_k = k3^{k-1} \end{cases}$$

(On a effectué  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ .)

Il faut remarquer que  $a_k$  et  $b_k$  vérifient un système  $2 \times 2$ , qu'on peut résoudre avec les formules de Cramer. Avec un peu de concentration, on trouve :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k &= \frac{-1}{4}(3^k - 2k \cdot 3^{k-1} - 1), \\ b_k &= \frac{-1}{4}(-6 \cdot 3^k + 8k \cdot 3^{k-1} + 6), \\ c_k &= \frac{-1}{4}(5 \cdot 3^k - 6k \cdot 3^{k-1} - 9). \end{aligned}$$

• Comme  $P_0(A) = 0_3$ , on en déduit que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$A^k = \frac{-3^k}{4}[A^2 - 6A + 5I_3] + \frac{k3^{k-1}}{2}[A^2 - 4A + 3I_3] + \frac{1}{4}[A^2 - 6A + 9I_3]$$

ce qu'il vaut mieux écrire

$$A^k = \frac{-3^k}{4}(A - I_3)(A - 5I_3) + \frac{k3^{k-1}}{2}(A - I_3)(A - 3I_3) + \frac{1}{4}(A - 3I_3)^2$$

pour simplifier le calcul des produits matriciels.

• Le calcul de  $A^2$  n'est pas très compliqué, mais il faut ensuite calculer simplifier trois polynômes en  $A$ . Les matrices  $(A - I_3)$ ,  $(A - 3I_3)$  et  $(A - 3I_3)^2$  ont déjà été calculées et comme elles ne sont pas inversibles, les produits sont plus faciles à calculer.

### Puissances de $A$ avec l'identité de Bézout

• On a appliqué plus haut le Théorème de décomposition des noyaux :

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - 3I_3)^2 \oplus \text{Ker}(A - I_3). \quad (2)$$

• La résolution de l'équation de Bézout va nous permettre de calculer les projections associées à cette décomposition en somme directe, puis d'en déduire les puissances de  $A$ .

• Les facteurs  $P_1 = (X - 3)^2$  et  $P_2 = (X - 1)$  étant premiers entre eux, les polynômes  $Q_1 = (X - 1)$  et  $Q_2 = (X - 3)^2$  sont premiers dans leur ensemble. On peut alors vérifier (avec la méthode habituelle) que

$$\frac{1}{4}(5 - X)Q_1 + \frac{1}{4}Q_2 = 1.$$

Les projections associées à la décomposition (2) sont donc

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}(5I_3 - A)(A - I_3) \quad \text{et} \quad \Pi_2 = \frac{1}{4}(A - 3I_3)^2. \quad (3)$$

☞ Il faut suivre les indices pour s'y retrouver : la projection  $\Pi_1$  envoie sur le sous-espace caractéristique  $\text{Ker}(A - 3I_3)^2 = \text{Ker } P_1(A)$  et la projection  $\Pi_2$  envoie sur le sous-espace propre  $\text{Ker}(A - I_3) = \text{Ker } P_2(A)$ .

On remarquera qu'on a déjà croisé ces deux matrices !

☛ Sur le sous-espace propre  $\text{Ker}(A - I_3) = \text{Im } \Pi_2$ , l'application  $(A - I_3)$  est identiquement nulle. Par conséquent,

$$(A - I_3) \times \Pi_2 = 0_3 \quad \text{c'est-à-dire} \quad A \times \Pi_2 = \Pi_2. \quad (4)$$

De même, sur le sous-espace caractéristique  $\text{Ker}(A - 3I_3)^2 = \text{Im } \Pi_1$ , l'application  $(A - 3I_3)^2$  est identiquement nulle :

$$(A - 3I_3)^2 \times \Pi_1 = 0_3. \quad (5)$$

D'après le cours, en restriction à ce sous-espace, la matrice  $A$  est la somme d'une homothétie et d'une matrice nilpotente. En effet, en posant

$$N = (A - 3I_3) \times \Pi_1,$$

on a

$$A \times \Pi_1 = 3\Pi_1 + N$$

mais aussi

$$(A - 3I_3)N = 0_3 \quad \text{c'est-à-dire} \quad AN = 3N.$$

Comme  $P_0(A) = 0_3$ , on peut vérifier que

$$N = \frac{1}{4}(A - 3I_3)(5I_3 - A)(A - I_3) = \frac{1}{2}(A - 3I_3)(A - I_3) \quad (6)$$

et donc que

$$N^2 = \frac{1}{4}(A - 3I_3)^2(A - I_3)^2 = 0_3.$$

☛ Bref :

$$A\Pi_1 = 3\Pi_1 + N, \quad A\Pi_2 = \Pi_2, \quad AN = 3N$$

et on démontre par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k \Pi_1 = 3^k \Pi_1 + k3^{k-1} N \quad \text{et} \quad A^k \Pi_2 = \Pi_2.$$

Comme  $\Pi_1 + \Pi_2 = I_3$ , on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k = 3^k \Pi_1 + k3^{k-1} N + \Pi_2.$$

Comme  $\Pi_1 + \Pi_2 = I_3$ , cette relation est vraie aussi pour  $k = 0$ .

En revenant à (3) et (6),

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \frac{3^k}{4}(5I_3 - A)(A - I_3) + \frac{k3^{k-1}}{2}(A - 3I_3)(A - I_3) + \frac{1}{4}(A - 3I_3)^2.$$

### Exponentielle de $tA$

☛ Par définition, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot A^k.$$

Ayant calculé les puissances de  $A$ , on a fait le plus difficile ! Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp(tA) = \frac{-e^{3t}}{4}(A - I_3)(A - 5I_3) + \frac{te^{3t}}{2}(A - I_3)(A - 3I_3) + \frac{e^t}{4}(A - 3I_3)^2$$

avec

$$(A - I_3)(A - 5I_3) = -2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A - I_3)(A - 3I_3) = 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(La matrice  $(A - 3I_3)^2$  a été calculée plus haut.)