Changement de variable

❧ La fonction $[\theta \mapsto \tan\theta]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^\infty$ de

$$I = \left]-\pi/2, \pi/2\right[$$

sur $\mathbb{R}$ et sa réciproque $[t \mapsto \operatorname{Arctan} t]$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

❧ Par conséquent, si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors la composée g définie par

$$\begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \tan\theta & \longmapsto & f(\tan\theta) = g(\theta) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et, réciproquement, si g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, alors la composée f définie par

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \operatorname{Arctan} t & \longmapsto & g(\operatorname{Arctan} t) = f(t) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

❧ Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $g(\theta) = f(\tan\theta)$, alors

$$\begin{aligned} \forall\,\theta \in I, \quad g'(\theta) &= (1+\tan^2\theta)f'(\tan\theta) \\ g''(\theta) &= 2\tan\theta(1+\tan^2\theta)f'(\tan\theta) + (1+\tan^2\theta)^2 f''(\tan\theta) \end{aligned}$$

et par conséquent l'expression

$$g''(\theta) - 2g'(\theta) + g(\theta)$$

est égale à

$$(1+\tan^2\theta)^2 f''(\tan\theta) + 2(1+\tan^2\theta)(\tan\theta - 1)f'(\tan\theta) + f(\tan\theta).$$

On a déjà remarqué que le changement de variable $t = \tan\theta$ réalisait une bijection entre l'intervalle I et l'intervalle $\mathbb{R}$, donc l'équation différentielle

$$\forall\,\theta \in I, \quad g''(\theta) - 2g'(\theta) + g(\theta) = 0$$

équivaut à l'équation différentielle

$$\forall\,t \in \mathbb{R}, \quad (1+t^2)^2 f''(t) + 2(1+t^2)(t-1)f'(t) + f(t) = 0. \qquad (\star)$$

Résolution de l'équation auxiliaire

❧ L'équation différentielle $y''(\theta) - 2y'(\theta) + y(\theta) = 0$ est linéaire, homogène et à coefficients constants. Son équation caractéristique est

$$X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2 = 0$$

donc g est solution de cette équation différentielle si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall\,\theta \in I, \quad g(\theta) = (A\theta + B)e^\theta.$$

Résolution

❧ D'après ce qui précède, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ est solution de l'équation différentielle $(\star)$ si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall\,t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (A.\operatorname{Arctan} t + B)e^{\operatorname{Arctan} t}.$$