Changement de variable

❧ La fonction $[s \mapsto e^s]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa réciproque $[t \mapsto \ell n\, t]$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

❧ Par conséquent, si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, alors la composée g définie par

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & e^s & \longmapsto & f(e^s) = g(s) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, réciproquement, si g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors la composée f définie par

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ell n\, t & \longmapsto & g(\ell n\, t) = f(t) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

❧ Si $g(s) = f(e^s)$ où f est de classe $\mathscr{C}^2$, alors

$$\forall\, s \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} g'(s) &= e^s f'(e^s), \\ g''(s) &= e^s f'(e^s) + e^{2s} f''(e^s) \end{aligned}$$

si bien que, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$g''(s) + 2g'(s) + 4g(s) = (e^s)^2 f''(e^s) + 3e^s f'(e^s) + 4f(e^s).$$

On en déduit que

$$\forall\, s \in \mathbb{R}, \quad g''(s) + 2g'(s) + 4g(s) = e^s + 4$$

si, et seulement si,

$$\forall\, s \in \mathbb{R}, \quad (e^s)^2 f''(e^s) + 3e^s f'(e^s) + 4f(e^s) = e^s + 4.$$

Comme $[s \mapsto e^s = t]$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, cette dernière équation équivaut à

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t + 4.$$

Résolution de l'équation auxiliaire

✍ *L'équation différentielle vérifiée par f est linéaire, mais on ne connaît pas de méthode simple pour la résoudre.*

Au contraire, l'équation différentielle vérifiée par la fonction auxiliaire g est linéaire et à coefficients constants *: on connaît donc une recette pour résoudre cette équation.*

❧ Les racines de l'équation caractéristique sont $-1 \pm i\sqrt{3}$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$\forall\, s \in \mathbb{R}, \quad y_H(s) = e^{-s}(K_1 \cos \sqrt{3}s + K_2 \sin \sqrt{3}s).$$

❧ Le second membre est la superposition d'une exponentielle et d'une constante.

Comme $[s \mapsto e^s]$ n'est pas une solution de l'équation homogène, on sait qu'il existe une solution particulière de

$$y''(s) + 2y'(s) + 4y(s) = e^s$$

de la forme $y_1(s) = \lambda e^s$. En substituant, on trouve $\lambda = 1/7$.

De même, comme $[s \mapsto 4]$ n'est pas une solution de l'équation homogène, on sait qu'il existe une solution particulière de

$$y''(s) + 2y'(s) + 4y(s) = 4$$

de la forme $y_2(s) = \mu$. En substituant, on trouve $\mu = 1$.

D'après le principe de superposition, une fonction y est solution de l'équation complète

$$y''(s) + 2y'(s) + 4y(s) = e^s + 4$$

si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\begin{aligned}\forall\, s \in \mathbb{R}, \quad y(s) &= y_H(s) + y_1(s) + y_2(s)\\ &= e^{-s}(K_1 \cos\sqrt{3}s + K_2 \sin\sqrt{3}s) + \frac{e^s}{7} + 1.\end{aligned}$$

Résolution

❧ D'après la première partie, une fonction f est solution de l'équation

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) + 3tx'(t) + 4x(t) = t + 4 \tag{$\star$}$$

si, et seulement si, la fonction $g = [s \mapsto f(e^s)]$ est une solution de l'équation auxiliaire.

❧ On en déduit que f est solution de $(\star)$ si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\begin{aligned}\forall\, t > 0, \quad f(t) &= y(\ell n\, t)\\ &= e^{-\ell n\, t}\big[K_1 \cos(\sqrt{3}\,\ell n\, t) + K_2 \sin(\sqrt{3}\,\ell n\, t)\big] + \frac{e^s}{7} + 1\\ &= K_1 \frac{\cos(\sqrt{3}\,\ell n\, t)}{t} + K_2 \frac{\sin(\sqrt{3}\,\ell n\, t)}{t} + \frac{t}{7} + 1.\end{aligned}$$