Séries de fonctions

Étudier la fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n + e^{nx})}{n^3}.$$

$\star$

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{\ln(n + e^{nx})}{n^3}.$$

Il est clair que chaque fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et positive sur $\mathbb{R}$,

❧ Pour $x \leqslant 0$, le terme e^{nx} est borné, donc (lorsque n tend vers $+\infty$)

$$u_n(x) = \frac{\ln[n + \mathcal{O}(1)]}{n^3} = \frac{\ln n + o(1)}{n^3} \sim \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Pour $x > 0$, au contraire, $e^{nx} = (e^x)^n$ tend vers $+\infty$ et $n = o(e^{nx})$, donc

$$u_n(x) = \frac{\ln(e^{nx}) + \ln[1 + o(1)]}{n^3} = \frac{nx + o(1)}{n^3} \sim \frac{x}{n^2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Bref : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente et l'ensemble de définition de S est égal à $\mathbb{R}$.

❧ Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est évidemment croissante sur $\mathbb{R}$, donc

$$\forall\, x \in \left]-\infty, a\right], \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(a)$$

et, comme on vient de le voir, $u_n(a) = \mathcal{O}(1/n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On a bien trouvé un majorant indépendant de x et ce majorant est bien le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur chaque intervalle $\left]-\infty, a\right]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Comme les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la somme S est continue sur chaque intervalle $\left]-\infty, a\right]$ et donc qu'elle est continue sur

$$\bigcup_{a\in\mathbb{R}} \left]-\infty, a\right] = \left]-\infty, +\infty\right[= \mathbb{R}.$$

REMARQUE.— Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ car :

$$u_n(x) = \frac{\ln(e^{nx}) + \ln(1 + ne^{-nx})}{n^3} = \frac{nx + o(1)}{n^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}.$$

Comme les fonctions u_n ne sont pas bornées, la série de fonctions $\sum u_n$ ne saurait être normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

De plus, comme les fonctions u_n sont positives,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geqslant 1, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \geqslant u_{n+1}(x)$$

donc le reste R_n n'est pas borné non plus sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle et la série de fonctions $\sum u_n$ n'est pas non plus uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

❧ Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n'(x) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{e^{nx}}{n + e^{nx}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{e^{nx}}{n + e^{nx}}.$$

On en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant u_n'(x) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Le majorant trouvé est indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et c'est le terme général d'une série convergente, donc la série dérivée $\sum u_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On a donc une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ et dont la série dérivée converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}.$$

On déduit de l'encadrement de $u_n'(x)$ que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 < S'(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Par conséquent, la fonction S est strictement croissante et $\pi^2/6$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

❧ Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n tend vers $\ell n\, n/n^3$ au voisinage de $-\infty$. Comme la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement au voisinage de $-\infty$, on en déduit que la somme S tend vers une limite finie au voisinage de $-\infty$ et que

$$\lim_{x\to-\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to-\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ell n\, n}{n^3}.$$

❧ Comme

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$$

on conjecture que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} (\pi^2/6)x$. Pour en avoir le cœur net, on pose

$$S(x) - \frac{\pi^2}{6}\cdot x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ell n(n+e^{nx}) - nx}{n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \quad \text{où} \quad v_n(x) = \frac{\ell n(1+ne^{-nx})}{n^3}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction v_n est positive et décroissante, donc

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [1, +\infty[, \quad 0 \leqslant v_n(x) \leqslant v_n(1)$$

et comme ne^{-n} tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$,

$$v_n(1) = \ell n(1+ne^{-n}) \sim ne^{-n} = n(e^{-1})n$$

donc la série $\sum v_n(1)$ est convergente. Ainsi, la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$ et, comme cet intervalle est un voisinage de $+\infty$,

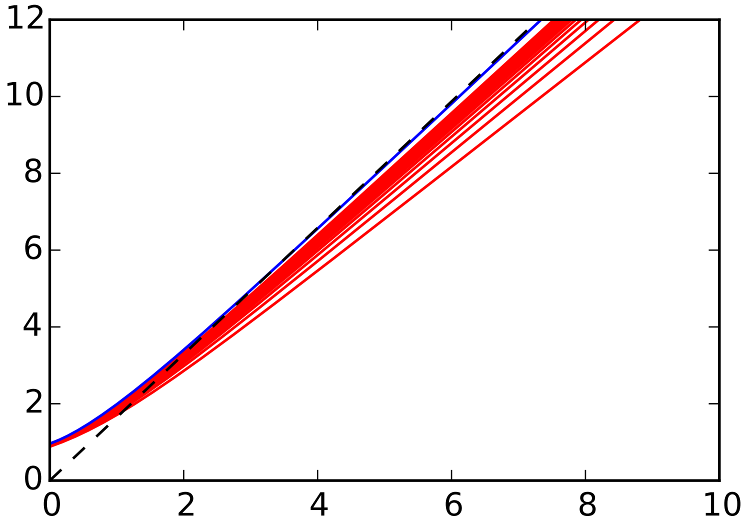
$$\lim_{x\to+\infty} S(x) - \frac{\pi^2}{6}\cdot x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} v_n(x) = 0.$$

Autrement dit, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$S(x) = \frac{\pi^2}{6}\cdot x + o(1)$$

et donc, comme on en avait eu l'intuition,

$$S(x) \sim \frac{\pi^2}{6}\cdot x.$$



Graphe de S avec les premières sommes partielles et l'asymptote oblique