Réduction du problème

❧ Supposons que f soit une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $I =]0, +\infty[$. Alors la fonction g définie par

$$\forall\, t > 0, \quad g(t) = tf'(t) + f(t) \tag{1}$$

est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall\, t > 0, \quad tg'(t) - 2g(t) = tf''(t) - 2f(t). \tag{2}$$

❧ Réciproquement, supposons que g soit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Les solutions de l'équation homogène

$$\forall\, t > 0, \quad ty'(t) + y(t) = 0$$

sont les fonctions de la forme $y(t) = K/t$.

D'après la méthode de variation de la constante, les solutions de l'équation complète

$$\forall\, t > 0, \quad ty'(t) + y(t) = g(t)$$

sont de la forme $y(t) = K(t)/t$ avec

$$\forall\, t > 0, \quad t \cdot \frac{K'(t)}{t} = g(t).$$

Comme g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I, elle admet des primitives G de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et toute fonction f telle que

$$\forall\, t > 0, \quad tf'(t) + f(t) = g(t) \tag{3}$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I :

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{G(t)}{t}. \tag{4}$$

❧ Si f est une solution de classe $\mathscr{C}^2$ de l'équation

$$\forall\, t > 0, \quad t^2 f''(t) - 2f(t) = \frac{3}{t}, \tag{5}$$

alors, d'après (2), la fonction g définie par (1) est une solution de classe $\mathscr{C}^1$ de l'équation

$$\forall\, t > 0, \quad tg'(t) - 2g(t) = \frac{3}{t}. \tag{6}$$

Réciproquement, si g est une solution de classe $\mathscr{C}^1$ de (6), alors toute solution f de (3) est de classe $\mathscr{C}^2$ et, d'après (1), une telle fonction f vérifie aussi l'équation (5).

✍ *On a ainsi ramené la résolution d'une équation du second ordre* (5) *à la résolution successive de deux équations du premier ordre :*

— *la première équation va nous donner une fonction auxiliaire* g *;*

— *la seconde équation (dont le second membre est la fonction auxiliaire* g*) nous donnera ensuite les solutions* f *de l'équation du second ordre* (5)*.*

J'ai pris soin de justifier l'équivalence *des deux problèmes : ce n'est pas spécialement compliqué, mais ça demande d'être rigoureux.*

Résolution du problème

❧ Résolvons l'équation (6).

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $y(t) = Kt^2$.

D'après la méthode de variation de la constante, les solutions de (6) sont les fonctions de la forme $y(t) = K(t).t^2$ avec

$$\forall\, t > 0, \quad t.K'(t).t^2 = \frac{3}{t},$$

c'est-à-dire

$$\forall\, t > 0, \quad K(t) = K_0 - \frac{1}{t^3}.$$

La solution générale de (6) est donc

$$\forall\, t > 0, \quad g(t) = \frac{-1}{t} + K_0.t^2.$$

❧ On a déjà résolu "en général" l'équation (3), il ne nous reste qu'à finir les calculs pour la fonction g que nous venons de trouver.

Les primitives de g sont les fonctions de la forme

$$\forall\, t > 0, \quad G(t) = -\ell n\, t + \frac{K_0}{3}t^3 + K_2$$

et d'après (4) la solution générale de (3) est

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{-\ell n\, t}{t} + \frac{K_0}{3}t^2 + \frac{K_2}{t}$$

Conclusion

Une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur I est une solution de (5) si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{-\ell n\, t}{t} + K_1 t^2 + \frac{K_2}{t}$$

(On a posé $K_1 = K_0/3$ pour simplifier.)