Composition de Mathématiques

Le 20 mars 2024 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Sujet CCINP

❖ I – Problème ❖

On considère l'équation différentielle suivante.

$$x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = 2x^3 \qquad (\mathrm{E})$$

Partie A. Équation homogène

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E).

$$x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = 0 \qquad (\mathrm{H})$$

On suppose donc qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n x^n$ *soit un réel* $r > 0$ *et on pose*

$$\forall\, x \in \left]-r, r\right[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Démontrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ de réels non nuls tels que

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$$

pour tout $x \in \left]-r, r\right[$.

2. Démontrer que la fonction f est solution de (H) sur l'intervalle $\left]-r, r\right[$ si, et seulement si, $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. En déduire que : si f est solution de (H) sur $\left]-r, r\right[$, alors $r \geqslant 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

4. Réciproquement, démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction

$$g = \left[x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}\right]$$

est une solution de (H) développable en série entière sur $\left]-1, 1\right[$.

Partie B. Résolution sur $\left]0, 1\right[$

On note $I = \left]0, 1\right[$.
Étant donnée une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^2$, *on définit la fonction* $z : I \to \mathbb{R}$ *par la relation :*

$$\forall\, x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x).$$

5. Démontrer que la fonction z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Exprimer z' et z'' en fonction de y, y' et y''.

6. Démontrer que la fonction y est une solution de (E) sur I si, et seulement si, la fonction z est une solution de l'équation différentielle

$$xz''(x) + z'(x) = 2x \qquad (\mathrm{E}_1)$$

sur I.

7. Soit $z : I \to \mathbb{R}$, une solution de (E_1). Démontrer qu'il existe un réel λ tel que

$$\forall\, x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

8. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I.

Partie C. Résolution sur $\left]0, +\infty\right[$

9. En admettant que les calculs menés sur l'intervalle $\left]0, 1\right[$ soient valables également sur l'intervalle $\left]1, +\infty\right[$, déterminer les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $\left]0, +\infty\right[$ qui vérifient l'équation différentielle (E) sur cet intervalle.

❖ II – Problème ❖

Un pion se déplace aléatoirement sur trois points distincts A, B *et* C.
Initialement, on suppose que ce pion se trouve sur le point A. *Entre l'instant* n *et l'instant* $(n+1)$, *on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place. Dans le cas contraire, il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.*

Partie A. Modélisation

Pour représenter mathématiquement la marche aléatoire décrite ci-dessus, on considère trois suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A_n \in \mathcal{A}, \quad B_n \in \mathcal{A}, \quad C_n \in \mathcal{A}$$

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le triplet (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements :

$$A_n \sqcup B_n \sqcup C_n = \Omega.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note alors

$$V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

où $p_n = \mathbf{P}(A_n)$, $q_n = \mathbf{P}(B_n)$, $r_n = \mathbf{P}(C_n)$.

1. Quelles valeurs attribuer à p_0, q_0 et r_0 ?

2. On pose

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comment justifier la relation suivante ?

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = MV_n$$

On distinguera clairement les calculs qui découlent de la théorie mathématique des choix effectués pour modéliser la marche aléatoire.

3. On **admet** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3\cdot 4^n}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. a. Calculer p_n, q_n et r_n.

3. b. En déduire les limites des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie B. Nombre moyen de passages en A

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

4. a. Démontrer que $\mathbb{1}_{A_n}$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

4. b. Quelle est sa loi ? Quelle est son espérance ?

5. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n})$ et interpréter le résultat.

6. En calculant

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n}, \mathbb{1}_{C_n}),$$

démontrer que les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_n}$, $\mathbb{1}_{B_n}$ et $\mathbb{1}_{C_n}$ ne sont pas indépendantes.

Partie C. Premier passage en B

On définit une application

$$T \,:\, \Omega \to \mathbb{N}$$

de la manière suivante.

- *Si le pion ne passe jamais par le point B, alors $T = 0$.*
- *Si le pion passe au moins une fois par le point B, alors T est l'instant auquel le pion passe pour la première fois au point B.*

7. a. Démontrer que

$$[T = 0] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c.$$

7. b. Démontrer que

$$[T = n] = \Big(\bigcap_{1\leqslant k<n} B_k^c\Big) \cap B_n.$$

7. c. En déduire que T est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

8. Pour calculer la loi de la variable aléatoire T, on fait l'**hypothèse de Markov** :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}\Big(B_{n+1} \,\Big|\, \bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\Big) = \mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n^c).$$

8. a. Exprimer B_n^c en fonction de A_n et C_n. Calculer $\mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n^c)$.

8. b. En déduire la valeur de $\mathbf{P}(T = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

8. c. Que vaut $\mathbf{P}(T = 0)$?

9. Démontrer que la variable aléatoire T est une variable aléatoire d'espérance finie et calculer cette espérance.

❖ III – Problème ❖

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et l'espace vectoriel

$$E = \mathbb{R}_n[X].$$

Partie A. Un produit scalaire

Quels que soient les polynômes P et Q dans E, on pose

$$\langle P \,|\, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt.$$

1. Démontrer que l'intégrale définissant $\langle P \,|\, Q \rangle$ est convergente.

2. Démontrer que l'application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

3. Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. À l'aide d'une intégration par parties soigneusement justifiée, démontrer que

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\,dt.$$

4. En déduire que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \langle X^k \,|\, 1 \rangle = k!.$$

Partie B. Polynômes de Laguerre

On considère l'application α définie par

$$\forall\, P \in E, \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'.$$

5. Démontrer que α est un endomorphisme de E.

6. Écrire la matrice de α dans la base canonique

$$\mathscr{B}_0 = (1, X, X^2, \dots, X^n).$$

7. En déduire que l'endomorphisme α est diagonalisable et que

$$\mathrm{Sp}(\alpha) = \big\{-k,\ 0 \leqslant k \leqslant n\big\}.$$

8. Soit $0 \leqslant k \leqslant n$.

8. a. Quelle est la dimension du sous-espace propre

$$\mathrm{Ker}(\alpha + k\,I_E)\,?$$

8. b. En déduire qu'il existe un, et un seul, polynôme $P_k \in E$, de coefficient dominant égal à 1, tel que

$$\alpha(P_k) = -kP_k.$$

8. c. Démontrer que $\deg P_k = k$.

8. d. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

9. a. Soient P et Q dans E. Démontrer que

$$\big\langle\, \alpha(P) \,\big|\, Q \,\big\rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt.$$

9. b. En déduire que l'endomorphisme α est autoadjoint.

10. Démontrer que la famille

$$(P_0, P_1, \dots, P_n)$$

est une base orthogonale de E.

Partie C. Méthode de quadrature

Dans cette dernière partie, on commence par démontrer que le polynôme P_n admet exactement n racines réelles distinctes :

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

et on démontre ensuite qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (\star)$$

Cette formule ramène le calcul d'une intégrale à l'évaluation d'un polynôme.

11. Démontrer que le polynôme P_n admet au plus n racines réelles distinctes.

12. On suppose que le polynôme P_n admet r racines réelles distinctes

$$x_1 < x_2 < \dots < x_r$$

avec $0 \leqslant r < n$.

12. a. Démontrer qu'il existe un polynôme Q_n tel que

$$\deg Q_n < n \quad \text{et} \quad \forall\, t \geqslant 0, \quad P_n(t)Q_n(t)e^{-t} \geqslant 0.$$

12. b. Démontrer que

$$Q_n \in \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$$

et en déduire que

$$\langle\, P_n \,|\, Q_n \,\rangle = 0.$$

12. c. Conclure.

13. Démontrer que l'identité $(\star)$ admet une, et une seule, solution

$$(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^n.$$

☞ *On pourra étudier les formes linéaires*

$$\Phi_i = [P \mapsto P(x_i)]$$

à l'aide des polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux scalaires $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

14. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

Solution I ❀ Solutions analytiques d'une équation différentielle

Partie A. Équation homogène

1. En tant que somme d'une série entière dont le rayon de convergence r est strictement positif, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle ouvert $]-r, r[$ et ses dérivées peuvent être calculées en dérivant terme à terme.

On en déduit que, pour tout $x \in]-r, r[$,

$$\begin{aligned} x^2(1-x)f''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n+1} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} \\ -x(1+x)f'(x) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n+1} \\ &\quad - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} \\ f(x) &= a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} \end{aligned}$$

puis que

$$\begin{aligned} &x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) \\ &\qquad = a_0 + (a_1 - a_1)x + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2(a_{n+1}-a_n)x^{n+1} \\ &\qquad = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n. \end{aligned}$$

2. La fonction f est donc solution de l'équation différentielle homogène (H) sur $]-r, r[$ si, et seulement si,

$$\forall\, x \in]-r, r[, \quad a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n = 0.$$

Les deux membres de cette identité sont des sommes de séries entières, dont les rayons de convergence sont tous les deux strictement positifs. D'après le Théorème d'identification terme à terme, l'identité précédente équivaut donc à

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 2, \quad \underbrace{(n-1)^2}_{>0}(a_n - a_{n-1}) = 0.$$

Finalement, la fonction f est solution de (H) sur $]-r, r[$ si, et seulement si,

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 2, \quad a_n = a_{n-1}$$

c'est-à-dire (par changement d'indice) :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad a_{n+1} = a_n.$$

3. Par conséquent, si f est une solution développable en série entière de (H), alors il existe un réel a_0 tel que

$$\forall\, x \in]-r, r[, \quad f(x) = a_0 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{a_0 x}{1-x}.$$

Le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1 (pour $a_0 \neq 0$) ou à $+\infty$ (pour $a_0 = 0$).

4. Tout d'abord, comme on vient de le voir, la fonction g est bien développable en série entière sur $]-1, 1[$, quelle que soit la valeur de λ.

Par ailleurs, quel que soit $x \in]-1, 1[$,

$$g'(x) = \frac{\lambda}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{2\lambda}{(1-x)^3}$$

et on peut en déduire directement que g est bien une solution de (H) sur $]-1, 1[$.

Partie B. Résolution sur $]0, 1[$

5. Par hypothèse, la fonction y est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. D'autre part, la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{1}{x} - 1\right]$$

est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur I, donc elle est aussi de classe $\mathscr{C}^2$. Par produit, la fonction z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

On vérifie sans peine que, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} z'(x) &= \frac{-y(x)}{x^2} + \frac{1-x}{x}\, y'(x) \\ z''(x) &= \frac{2y(x)}{x^3} - \frac{2y'(x)}{x^2} + \frac{1-x}{x}\, y''(x). \end{aligned}$$

6. On déduit des expressions précédentes que, pour tout $x > 0$,

$$xz''(x) + z'(x) = \frac{1}{x^2}\big[(1-x)x^2y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x)\big]$$

et donc que : y est une solution de (E) sur I si, et seulement si,

$$\forall\, x > 0, \quad xz''(x) + z'(x) = \frac{2x^3}{x^2} = 2x.$$

7. La fonction $u = z'$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. On peut appliquer les méthodes usuelles.

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $[x \mapsto K/x]$.

Une solution particulière de l'équation complète est égale à $[x \mapsto x]$ (on peut la trouver au talent, en faisant varier la constante ou simplement en analysant l'énoncé).

Le principe de superposition donne alors la solution générale de (E_1) : la fonction z est une solution de (E_1) si, et seulement si, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x > 0, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

8. On déduit de la question précédente que z est une solution de (E_1) si, et seulement si, il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$\forall\, x > 0, \quad z(x) = \frac{x^2}{2} + \lambda \ln x + \mu.$$

On déduit alors de **[6.]** que y est une solution de (E) si, et seulement si, il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{x}{1-x}\, z(x) \\ &= \mu \cdot \frac{x}{1-x} + \lambda \cdot \frac{x \ln x}{1-x} + \frac{x^3}{2(1-x)}. \end{aligned}$$

> *On reconnaît successivement les solutions développables en série entière de l'équation homogène (étudiée dans la première partie) ; des solutions* non *développables en série entière de l'équation homogène (ces fonctions présentent une tangente verticale à l'origine, incompatible avec la possibilité d'un développement en série entière) ; et enfin une solution particulière de l'équation complète.*

Partie C. Résolution sur $]0, +\infty[$

9. On raisonne par analyse et synthèse.

❧ Si f est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$, alors les restrictions de f à $]0, 1[$ et à $]1, +\infty[$ sont aussi des solutions de (E). Par conséquent, il existe deux couples

$$(\lambda_1, \mu_1) \quad \text{et} \quad (\lambda_2, \mu_2)$$

tels que

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad f(x) = \lambda_1 \frac{x \ln x}{1-x} + \frac{\mu_1 x}{1-x} + \frac{x^3}{2(1-x)}$$

et

$$\forall\, x > 1, \quad f(x) = \lambda_2 \frac{x \ln x}{1-x} + \frac{\mu_2 x}{1-x} + \frac{x^3}{2(1-x)}.$$

De plus, la fonction f est continue au voisinage de 1 : elle doit donc avoir le même développement limité à l'ordre 0 au voisinage de 1. On pose donc $x = 1 + h$ et on obtient

$$\begin{aligned} f(1+h) &= \lambda \frac{(1+h)\ln(1+h)}{-h} + \frac{\mu(1+h)}{-h} + \frac{(1+h)^3}{-2h} \\ &= \frac{1}{h}\Big[-\lambda(1+h)\big(h + o(h)\big) - \mu(1+h) \\ &\qquad - \Big(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}h + o(h)\Big)\Big] \\ &= -\frac{\mu + 1/2}{h} - (\lambda + \mu + 3/2) + o(1) \end{aligned}$$

Pour que f admette une limite finie au voisinage de 1, il faut donc que

$$\mu_1 + \frac{1}{2} = \mu_2 + \frac{1}{2} = 0$$

et donc $\mu_i = -1/2$. De plus, il faut que la limite à gauche en 1 soit égale à la limite à droite en 1, c'est-à-dire

$$\lambda_1 + \mu_1 + \frac{3}{2} = \lambda_2 + \mu_2 + \frac{3}{2}$$

et donc que

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

Il faut donc que

$$f(x) = \lambda \frac{x \ln x}{1-x} + \frac{x^3 - x}{2(1-x)} = \lambda \frac{x \ln x}{1-x} - \frac{x(1+x)}{2}$$

et que $f(1) = -\lambda - 1$.

❧ Réciproquement, considérons un réel λ et la fonction f définie par

$$f(x) = \lambda \frac{x \ln x}{1-x} - \frac{x(1+x)}{2}$$

pour $x \in\,]0, 1[\, \cup\,]1, +\infty[$ et par $f(1) = -\lambda - 1$.

Il est clair que cette fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur

$$]0, 1[\, \cup\,]1, +\infty[.$$

D'après les calculs précédents, elle est continue en $x = 1$. Mieux, on sait que la fonction

$$S = \left[h \mapsto -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n+1}\right]$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ (somme d'une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1) et

$$\forall\, 0 < x < 2, \quad f(x) = \lambda x S(1-x) - \frac{x(1+x)}{2}.$$

Donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, 2[$ et donc sur $]0, +\infty[$.

Comme la fonction f est solution de (E) sur les deux intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ et que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, elle est en fait solution de (E) sur $]0, +\infty[$ (puisque les coefficients de l'équation différentielle sont des fonctions continues de x).

❧ L'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ est donc une droite affine : la fonction f est solution sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, il existe un réel λ tel que

$$f(1) = -1 - \lambda$$

et

$$\forall\, x \neq 1, \quad f(x) = \lambda \frac{x \ln x}{1-x} - \frac{x(1+x)}{2}.$$

Solution II ❀ Marche aléatoire

Partie A. Modélisation

1. Il paraît naturel d'interpréter les évènements A_n, B_n et C_n de la manière suivante : l'évènement A_n (resp. B_n, resp. C_n) est réalisé si, et seulement si, le pion occupe la position A (resp. la position B, resp. la position C) à l'instant n.

D'après l'énoncé, le pion occupe toujours la position A à l'instant 0. Autrement dit,

$$A_0 = \Omega, \qquad B_0 = C_0 = \varnothing.$$

Par conséquent, $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.

2. Supposons que $\mathbf{P}(A_n) \neq 0$. D'après l'énoncé,

$$\mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n) = 1/2$$

(sachant que le pion occupe la position A à l'instant n, il reste en A à l'instant $(n+1)$) et

$$\mathbf{P}(B_{n+1} \mid A_n) = \mathbf{P}(C_{n+1} \mid A_n) = 1/4$$

(sachant que le pion occupe la position A à l'instant n, il se déplace et occupe l'une des deux autres positions à l'instant suivant avec équiprobabilité). On peut alors déduire de la définition des probabilités conditionnelles que

$$\begin{cases} \mathbf{P}(A_{n+1}A_n) = {}^1\!/_2\,\mathbf{P}(A_n), \\ \mathbf{P}(B_{n+1}A_n) = {}^1\!/_4\,\mathbf{P}(A_n), \\ \mathbf{P}(C_{n+1}A_n) = {}^1\!/_4\,\mathbf{P}(A_n). \end{cases} \tag{1}$$

On notera que ces trois relations sont évidemment vraies si $\mathbf{P}(A_n) = 0$.

De manière analogue, on obtient aussi les relations suivantes.

$$\begin{cases} \mathbf{P}(A_{n+1}B_n) = {}^1\!/_4\,\mathbf{P}(B_n) \\ \mathbf{P}(B_{n+1}B_n) = {}^1\!/_2\,\mathbf{P}(B_n) \\ \mathbf{P}(C_{n+1}B_n) = {}^1\!/_4\,\mathbf{P}(B_n) \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \mathbf{P}(A_{n+1}C_n) = {}^1\!/_4\,\mathbf{P}(C_n) \\ \mathbf{P}(B_{n+1}C_n) = {}^1\!/_4\,\mathbf{P}(C_n) \\ \mathbf{P}(C_{n+1}C_n) = {}^1\!/_2\,\mathbf{P}(C_n) \end{cases} \tag{3}$$

REMARQUE.— On aura noté que dans tous ces évènements, l'opérateur $\cap$ est sous-entendu. C'est clairement pour me simplifier la tâche, mais qu'on ne vienne pas m'en faire le reproche : c'est Kolmogorov qui a commencé (précisément pour ce genre de calculs).

On sait, par construction même, que (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_{n+1}A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}B_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}C_n) \\ &= {}^1\!/_2\,\mathbf{P}(A_n) + {}^1\!/_4\,\mathbf{P}(B_n) + {}^1\!/_4\,\mathbf{P}(C_n). \end{aligned}$$

On reconnaît ici la première ligne de l'égalité matricielle $V_{n+1} = MV_n$.
Des relations analogues pour $\mathbf{P}(B_{n+1})$ et $\mathbf{P}(C_{n+1})$, on tire de même les deuxième et troisième lignes de $V_{n+1}MV_n$.
On a ainsi rattaché la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = MV_n$$

à la marche aléatoire du pion entre les trois positions.
Il serait plus agréable de modéliser cette marche aléatoire par une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé, avec la donnée initiale

$$\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1, \quad \mathbf{P}(X_0 = 1) = \mathbf{P}(X_0 = 2) = 0$$

et la relation de récurrence

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \left| \begin{array}{ll} {}^1\!/_2 & \textit{pour } i = j, \\ {}^1\!/_4 & \textit{pour } i \neq j. \end{array} \right.$$

De ce point de vue, on voit mieux que notre modélisation est incomplète. La relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = MV_n$$

permet de déduire la loi de X_{n+1} en fonction de la loi de X_n et donc, de proche en proche, de calculer la loi marginale de chacune des variables X_n. *Mais on ne peut pas en déduire la suite des* lois conjointes des vecteurs

$$(X_0, X_1, \dots, X_n)$$

*(c'est la suite de ces lois qu'on appelle la **loi du processus aléatoire**).*

*Pour calculer ces lois conjointes, il faut appliquer la formule des probabilités composées et c'est à ce moment-là que l'*hypothèse de Markov *prend tout son sens : l'hypothèse de Markov est une hypothèse simplificatrice qui permet de calculer toutes les lois conjointes à partir des relations dont nous disposons déjà.*

3. a. D'après la relation de récurrence, il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad V_n = M^n V_0$$

donc V_n est la première colonne de la matrice M^n. Par conséquent,

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot 4^n}, \quad q_n = r_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. b. On en déduit immédiatement que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = {}^1\!/_3.$$

Autrement dit, la variable aléatoire X_n tend asymptotiquement vers la loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$: lorsque n devient grand, le pion a environ une chance sur trois de se trouver en un quelconque des trois points A, B et C.

Partie B. Nombre moyen de passages en A

4. a. Par définition, $\mathbb{1}_{A_n}$ est une application de Ω dans $E = \{0; 1\}$. Il est clair que

$$[\mathbb{1}_{A_n} = 1] = A_n \quad \text{et que} \quad [\mathbb{1}_{A_n} = 0] = A_n^c.$$

Or $A_n \in \mathcal{A}$ par hypothèse et $A_n^c \in \mathcal{A}$ (car une tribu est stable par passage au complémentaire), donc

$$\forall\, x \in E, \quad [\mathbb{1}_{A_n} = x] \in \mathcal{A}$$

ce qui prouve que $\mathbb{1}_{A_n}$ est bien une variable aléatoire discrète de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $E = \{0; 1\}$.

4. b. En tant que variable aléatoire à valeurs dans $\{0; 1\}$, la variable aléatoire $\mathbb{1}_{A_n}$ suit une loi de Bernoulli. Son paramètre est égal à

$$\mathbf{P}(\mathbb{1}_{A_n} = 1) = \mathbf{P}(A_n) = p_n.$$

Donc la variable aléatoire $\mathbb{1}_{A_n}$ suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p_n)$ et on sait que son espérance est égale à p_n.

5. Comme $U_1 = \mathbb{1}_{A_1}$, ..., $U_n = \mathbb{1}_{A_n}$ sont des variables aléatoires d'espérance finie, la somme $U_1 + \cdots + U_n$ est une variable aléatoire d'espérance finie et, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(U_1 + \cdots + U_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(U_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

> *Une somme de variables aléatoires de Bernoulli est égale au nombre de ces variables aléatoires qui prennent la valeur* 1 *(puisqu'une variable aléatoire de Bernoulli est égale à* 0 *ou à* 1*). Par conséquent, la somme* $U_1 + \cdots + U_n$ *est égale au nombre (aléatoire) d'évènements réalisés parmi* A_1, …, A_n, *c'est-à-dire au nombre (aléatoire) de fois que le pion passe par la position* A *après son départ.*
> *L'espérance de la somme* $U_1 + \cdots + U_n$ *peut alors être comprise comme le* nombre moyen de passages par la position A *(il est utile de lire les titres).*

6. Comme (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements,

$$p_n + q_n + r_n = \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}(C_n) = 1.$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$\mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n}) = p_n + q_n = 1 - r_n$$

et donc que

$$\mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})\,\mathbf{E}(\mathbb{1}_{C_n}) = (1 - r_n)r_n > 0.$$

Cependant,

— ou bien $\omega \in C_n$ et alors $\omega \notin A_n$ et $\omega \notin B_n$, donc

$$[\mathbb{1}_{A_n}(\omega) + \mathbb{1}_{B_n}(\omega)][\mathbb{1}_{C_n}(\omega)] = [0 + 0] \times 1 = 0$$

— ou bien $\omega \notin C_n$ et dans ce cas

$$[\mathbb{1}_{A_n}(\omega) + \mathbb{1}_{B_n}(\omega)][\mathbb{1}_{C_n}(\omega)] = [\ldots] \times 0 = 0$$

donc la variable aléatoire $(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})\mathbb{1}_{C_n}$ est identiquement nulle et donc d'espérance nulle.

D'après la Formule de Koenig-Huyghens,

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n}, \mathbb{1}_{C_n}) &= \mathbf{E}[(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})\mathbb{1}_{C_n}] \\ &\quad - \mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})\,\mathbf{E}(\mathbb{1}_{C_n}) \\ &= 0 - (1 - r_n)r_n < 0\end{aligned}$$

donc les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})$ et $\mathbb{1}_{C_n}$ sont corrélées.

D'après le Théorème des coalitions, si les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_n}$, $\mathbb{1}_{B_n}$ et $\mathbb{1}_{C_n}$ étaient indépendantes, les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})$ et $\mathbb{1}_{C_n}$ seraient aussi indépendantes et donc décorrélées.

Par conséquent, les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_n}$, $\mathbb{1}_{B_n}$ et $\mathbb{1}_{C_n}$ ne sont pas indépendantes.

> *Il ne suffit pas de remarquer que ces trois variables aléatoires sont liées par une relation affine :*
>
> $$\mathbf{P}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n} + \mathbb{1}_{C_n} = 1) = 1$$
>
> *pour conclure qu'elles ne sont pas indépendantes, mais cela met sur la voie...*

Partie C. Premier passage en B

7. a. Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}T(\omega) = 0 &\iff \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \omega \notin B_n \\ &\iff \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \omega \in B_n^c \\ &\iff \omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c\end{aligned}$$

et par conséquent

$$[T = 0] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c.$$

> *Tous les* B_n *appartiennent à la tribu* $\mathcal{A}$ *par définition. Une tribu est stable par passage au complémentaire et par intersection dénombrable, donc* $[T = 0] \in \mathcal{A}$.

7. b. Rappelons (cf. **[1.]**) pour commencer que $B_0 = \varnothing$ et donc que $B_0^c = \Omega$. Par définition de $T(\omega)$, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}T(\omega) = n &\iff \omega \notin B_0, \ldots, \omega \notin B_{n-1}, \omega \in B_n \\ &\iff \omega \in B_1^c, \ldots, \omega \in B_{n-1}^c, \omega \in B_n \\ &\iff \omega \in \Big(\bigcap_{1\leqslant k<n} B_k^c\Big) \cap B_n\end{aligned}$$

et donc

$$[T = n] = \Big(\bigcap_{1\leqslant k<n} B_k^c\Big) \cap B_n.$$

> *Une tribu étant stable par passage au complémentaire et par intersection finie, on en déduit que* $[T = n] \in \mathcal{A}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

7. c. Par construction, T est une application de Ω dans $\mathbb{N}$. D'après les deux questions précédentes,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad [T = n] \in \mathcal{A}$$

donc $T : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ est bien une variable aléatoire discrète.

8. a. Comme (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements,

$$B_n \sqcup (A_n \sqcup C_n) = \Omega$$

donc

$$B_n^c = A_n \sqcup C_n$$

et par conséquent

$$\mathbf{P}(B_n^c) = \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(C_n).$$

On en déduit que

$$B_{n+1} \cap B_n^c = (B_{n+1} \cap A_n) \sqcup (B_{n+1} \cap C_n)$$

et donc que, par additivité de la mesure $\mathbf{P}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B_{n+1}B_n^c) &= \mathbf{P}(B_{n+1}A_n) + \mathbf{P}(B_{n+1}C_n) \\ &= {}^1\!/_4\,\mathbf{P}(A_n) + {}^1\!/_4\,\mathbf{P}(C_n) \qquad \text{(par [2.])} \\ &= {}^1\!/_4\,\mathbf{P}(B_n^c).\end{aligned}$$

On en déduit enfin que

$$\mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n^c) = \frac{\mathbf{P}(B_{n+1}B_n^c)}{\mathbf{P}(B_n^c)} = \frac{1}{4}.$$

8. b. On reprend l'expression de $[T = k]$ établie au **[7.b.]** et on applique la formule des probabilités composées.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T = k) = \mathbf{P}(B_n \mid B_{n-1}^c \cdots B_1^c) \\ \times \mathbf{P}(B_{n-1}^c \mid B_{n-2}^c \cdots B_1^c) \\ \times \cdots \\ \times \mathbf{P}(B_3^c \mid B_2^c B_1^c) \times \mathbf{P}(B_2^c \mid B_1^c) \times \mathbf{P}(B_1^c).\end{aligned}$$

> *La formule des probabilités composées est $\boxed{\text{la}}$ règle de calcul à appliquer pour calculer la probabilité d'une intersection d'évènements.*

L'hypothèse de Markov nous permet de simplifier cette expression, car, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(B_{n+1}^c \;\Big|\; \bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\Big) &= 1 - \mathbf{P}\Big(B_{n+1} \;\Big|\; \bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\Big) \\ &= 1 - \mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n^c) && \text{(Markov)} \\ &= 3/4. && \text{(par [8.a.])}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\mathbf{P}(T = k) = \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{3}{4}\Big)^{n-2} \cdot \mathbf{P}(B_1^c).$$

Or $\mathbf{P}(B_1^c) = 1 - q_1 = 1 - 1/4 = 3/4$, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(T = k) = \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{3}{4}\Big)^{k-1}.$$

8. c. Comme la famille $([T = k])_{k\in\mathbb{N}}$ est, par construction, un système complet d'évènements et que la mesure de probabilité $\mathbf{P}$ est σ-additive,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T = 0) &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T = k) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{3}{4}\Big)^{k-1} = 0.\end{aligned}$$

> ***Variante.*** *On peut aussi remarquer que $[T = 0]$ est l'intersection d'une suite décroissante d'évènements :*
>
> $$[T = 0] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_1^c B_2^c \cdots B_n^c.$$
>
> *Par continuité décroissante de $\mathbf{P}$,*
>
> $$\mathbf{P}(T = 0) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_1^c B_2^c \cdots B_n^c)$$
>
> *et d'après les calculs menés au* ***[8.b.]****, cette limite est nulle.*

9. La variable aléatoire T a même loi qu'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $1/4$ (seule nuance : une variable aléatoire géométrique n'est jamais nulle alors que T prend la valeur 0 avec probabilité nulle). Donc T est une variable aléatoire d'espérance finie et $\mathbf{E}(T) = 4$.

Solution III ❀ Quadrature de Gauss

Partie A. Un produit scalaire

1. Pour que l'intégrale qui définit $\langle P \,|\, Q \rangle$ soit convergente, il suffit que la fonction

$$f = \big[t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}\big]$$

soit intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Il est clair que la fonction f est continue sur l'intervalle fermé $[0, +\infty[$ (les fonctions P et Q sont polynomiales).

De plus, pour tout polynôme $R \in E$, le degré de R est inférieur à n et donc

$$R(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(t^n).$$

Par conséquent, lorsque t tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{O}(t^{2n}e^{-t}) \\ &= \mathcal{O}(t^{2n}e^{-t/2} \cdot e^{-t/2}) = o(e^{-t/2})\end{aligned}$$

par croissances comparées de t^{2n} et de $e^{-t/2}$. La fonction $[t \mapsto e^{-\alpha t}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ pour tout $\alpha > 0$, donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

On a ainsi démontré que f était intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc que l'intégrale qui définit $\langle P \,|\, Q \rangle$ était convergente.

2. D'après la question précédente, l'application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est bien définie de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Il est clair que cette application est bilinéaire et symétrique.

Quel que soit $P \in E$,

$$\forall\, t \in [0, +\infty[, \quad P^2(t)e^{-t} \geqslant 0$$

donc $\langle P \,|\, P \rangle \geqslant 0$ puisque l'intégration bornes croissantes conserve les inégalités.

Enfin, la fonction $\big[t \mapsto P^2(t)e^{-t}\big]$ est évidemment <u>continue</u> et positive. Si son intégrale $\langle P \,|\, P \rangle$ sur $[0, +\infty[$ est nulle, alors

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad P^2(t)e^{-t} = 0$$

et par conséquent le polynôme P admet une infinité de racines (tous les réels positifs au moins). Par conséquent, P est le polynôme nul, ce qui prouve que la forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est définie positive.

L'application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

3. Il est clair que les deux fonctions

$$u = \big[t \mapsto t^k\big] \quad \text{et} \quad v = \big[t \mapsto e^{-t}\big]$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Par conséquent, pour tout $A > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^A t^k e^{-t}\,dt &= [-t^k e^{-t}]_0^A + \int_0^A k t^{k-1} e^{-t}\,dt \\ &= -A^k e^{-A} + k\int_0^A t^{k-1} e^{-t}\,dt.\end{aligned}$$

Par croissances comparées (puissances *vs* exponentielle),

$$\lim_{A\to+\infty} A^k e^{-A} = 0.$$

De plus, d'après **[1.]**, les intégrales qui définissent $\langle X^k \,|\, 1 \rangle$ et $\langle X^{k-1} \,|\, 1 \rangle$ sont convergentes (puisque $(k - 1) \geqslant 0$). Donc, en faisant tendre A vers $+\infty$,

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt = k\int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t}\,dt$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\langle X^k \,|\, 1 \rangle = k\,\langle X^{k-1} \,|\, 1 \rangle.$$

4. Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur $0 \leqslant k \leqslant n$.

Tout d'abord,

$$\langle 1 \,|\, 1 \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1 = 0!$$

donc le résultat est vérifié pour $k = 0$.

HR : Supposons qu'il existe un entier $0 \leqslant k < n$ tel que $\langle X^k \,|\, 1 \rangle = k!$. D'après la question précédente,

$$\langle X^{k+1} \,|\, 1 \rangle = (k+1)\langle X^k \,|\, 1 \rangle = (k+1).k! = (k+1)!,$$

ce qui prouve l'hérédité de la relation de récurrence.

On a ainsi démontré que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \langle X^k \,|\, 1 \rangle = k!.$$

Partie B. Polynômes de Laguerre

5. Il est clair que $\alpha(P) \in \mathbb{R}[X]$ pour tout $P \in E$. De plus, comme $\deg P \leqslant n$, alors

$$\deg P' \leqslant n-1 \quad \text{et} \quad \deg P'' \leqslant n-2,$$

donc

$$\deg(XP'') \leqslant n-1 \quad \text{et} \quad \deg(1-X)P' \leqslant n$$

et donc $\deg \alpha(P) \leqslant n$. Par conséquent, $\alpha(P) \in E$ pour tout $P \in E$.

❧ Par linéarité de la dérivation sur E, l'application α est donc bien un endomorphisme de E.

6. Tout d'abord, $\alpha(1) = 0$. Ensuite, pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned}\alpha(X^k) &= k(k-1)X^{k-1} + k(1-X)X^{k-1} \\ &= -kX^k + k^2X^{k-1}.\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de α relative à la base canonique de E est la suivante.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & -1 & 4 & & & & \\ & & -2 & \ddots & & & \\ & & & \ddots & k^2 & & \\ & & & & -k & \ddots & \\ & & & & & \ddots & n^2 \\ & & & & & & -n \end{pmatrix}$$

(Les coefficients qui ne sont pas écrits sont tous nuls.)

7. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux. Par conséquent, le spectre de l'endomorphisme α est

$$\{-k,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}.$$

La dimension de E est égale à $(n+1)$ et l'endomorphisme α possède $(n+1)$ valeurs propres deux à deux distinctes, donc l'endomorphisme α est diagonalisable et chacun de ses sous-espaces propres est une droite vectorielle.

8. a. On a déjà répondu : la dimension de chaque sous-espace propre est égale à 1.

8. b. Comme $-k$ est une valeur propre de α, il existe nécessairement un vecteur propre $P \neq 0$ tel que $\alpha(P) = -kP$. Comme P n'est pas le polynôme nul, il possède un coefficient dominant, que nous allons noter a_k. Le polynôme

$$P_k = \frac{1}{a_k} \cdot P$$

est alors un polynôme unitaire (son coefficient dominant est égal à 1) et comme il est proportionnel au vecteur propre P, c'est aussi un vecteur propre de α, lui aussi associé à la valeur propre $-k$.

Il existe donc au moins un polynôme unitaire qui soit un vecteur propre de α associé à la valeur propre $-k$.

❧ D'après **[8.a.]**, la dimension du sous-espace propre est égale à 1. Par conséquent, tous les vecteurs propres associés à la valeur propre $-k$ sont proportionnels.

Si deux polynômes sont proportionnels, alors on a

$$a_dX^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0 = \theta a_dX^d + \theta a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + \theta a_0$$

et si ces deux polynômes sont unitaires, alors

$$a_d = \theta a_d = 1,$$

donc $\theta = 1$: ces deux polynômes sont en fait égaux.

Pour toute valeur propre λ de α, il existe donc exactement un polynôme unitaire qui soit un vecteur propre de α associé à λ.

8. c. D'après **[6.]**, la matrice de α relative à la base canonique est triangulaire supérieure. Cela se traduit en particulier par le fait que

$$\forall\, P \in E, \quad \deg \alpha(P) \leqslant \deg P.$$

❧ Notons d, le degré du polynôme P_k. Comme P_k est unitaire, il existe un polynôme R_k tel que

$$P_k = X^d + R_k \quad \text{et} \quad \deg R_k < d.$$

Par linéarité de α,

$$\alpha(P_k) = \alpha(X^d) + \alpha(R_k)$$

avec, comme on l'a remarqué en commençant,

$$\deg \alpha(R_k) \leqslant \deg R_k < d.$$

Toujours d'après **[6.]**,

$$\alpha(P_k) = -dX^d + \underbrace{d^2X^{d-1} + \alpha(P_k)}_{\deg < d}.$$

On en déduit que le degré de $\alpha(P_k)$ est égal à d et que son coefficient dominant est égal à $-d$.

❧ Comme P_k est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = -k$,

$$\alpha(P_k) = -kP_k = -kX^d - kR_k$$

et comme $\deg R_k < d$, le coefficient dominant de $\alpha(P_k)$ est égal à $-k$.

On a ainsi démontré que $d = \deg P_k = k$.

8. d. D'après la matrice **[6.]**,

$$\alpha(1) = 0 = (-0) \cdot 1,$$

donc 1 est un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre $\lambda = -0$. L'unicité établie en **[8.b.]** prouve alors que

$$P_0 = 1.$$

❧ De même, $\alpha(X) = 1 - X$ et comme $\alpha(1) = 0$,

$$\alpha(X-1) = (-1)\cdot(X-1).$$

À nouveau par unicité du polynôme unitaire propre associé à $\lambda = -1$,

$$P_1 = X - 1.$$

❧ Toujours d'après la matrice **[6.]**,

$$\begin{aligned}\alpha(X^2-4X+2) &= (-2X^2+4X) - 4(-X+1) + 0\\ &= -2X^2+8X-4\\ &= (-2)\cdot(X^2-4X+2).\end{aligned}$$

On a donc un polynôme unitaire qui est bien un vecteur propre associé à $\lambda = -2$. Toujours par unicité,

$$P_2 = X^2 - 4X + 2.$$

9. a. Comme P et Q sont deux polynômes, les deux fonctions

$$u = \left[t \mapsto tP'(t)e^{-t}\right] \quad\text{et}\quad v = [t \mapsto Q(t)]$$

sont clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et on vérifie que

$$\forall\, t \geqslant 0,\quad u'(t) = \alpha(P)(t)e^{-t}.$$

En intégrant par parties, pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt = \left[tP'(t)e^{-t}\cdot Q(t)\right]_0^A - \int_0^A \alpha(P)(t)e^{-t}\cdot Q(t)\,dt.$$

Par croissances comparées d'une fonction polynomiale et de la fonction exponentielle,

$$\lim_{A\to+\infty} AP'(A)Q(A)e^{-A} = 0.$$

D'après **[1.]**, les intégrales qui définissent les produits scalaires

$$\langle\, XP' \,|\, Q' \,\rangle \quad\text{et}\quad \langle\, \alpha(P) \,|\, Q \,\rangle$$

sont toutes les deux convergentes. On peut donc faire tendre A vers $+\infty$, ce qui nous donne

$$\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt = -\int_0^{+\infty} \alpha(P)(t)Q(t)e^{-t}\,dt$$

ou, si on préfère,

$$\langle\, XP' \,|\, Q' \,\rangle = -\langle\, \alpha(P) \,|\, Q \,\rangle.$$

9. b. Soient P et Q dans E. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\langle\, \alpha(P) \,|\, Q \,\rangle &= -\langle\, XP' \,|\, Q' \,\rangle,\\ \langle\, P \,|\, \alpha(Q) \,\rangle = \langle\, \alpha(Q) \,|\, P \,\rangle &= -\langle\, XQ' \,|\, P' \,\rangle\end{aligned}$$

et, en revenant à la définition du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\langle\, XP' \,|\, Q' \,\rangle &= \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt\\ &= \int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)e^{-t}\,dt = \langle\, XQ' \,|\, P' \,\rangle.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall\, P, Q \in E,\quad \langle\, \alpha(P) \,|\, Q \,\rangle = \langle\, P \,|\, \alpha(Q) \,\rangle$$

et donc que l'endomorphisme α est auto-adjoint.

10. Par **[8.c.]**,

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n,\quad \deg P_k = k$$

donc la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est bien une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$ (famille de polynômes échelonnée en degré).

❧ Par **[9.b.]**, si $k \neq \ell$,

$$\langle\, \alpha(P_k) \,|\, P_\ell \,\rangle = \langle\, P_k \,|\, \alpha(P_\ell) \,\rangle$$

et comme P_k et P_ℓ sont des vecteurs propres de α **[8.b.]**,

$$-k\,\langle\, P_k \,|\, P_\ell \,\rangle = -\ell\,\langle\, P_k \,|\, P_\ell \,\rangle$$

(en utilisant la bilinéarité du produit scalaire). On en déduit que

$$(\ell - k)\,\langle\, P_k \,|\, P_\ell \,\rangle = 0$$

et comme $\ell - k \neq 0$, on en déduit que les polynômes sont deux à deux orthogonaux :

$$\forall\, k \neq \ell,\quad \langle\, P_k \,|\, P_\ell \,\rangle = 0.$$

Partie C. Méthode de quadrature

11. Comme le degré de P_n est égal à n **[8.c.]**, ce polynôme admet au plus n racines réelles distinctes.

12. a. On note

$$y_1 < y_2 < \cdots < y_s,$$

les racines réelles *strictement positives* et *de multiplicité impaire* de P_n. Comme P_n admet exactement r racines réelles, on en déduit que $0 \leqslant s \leqslant r$. Par conséquent,

$$Q_n = \pm\prod_{k=1}^{s}(X - y_k) \in \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

Les expressions $Q_n(t)$ et $P_n(t)$ changent de signe en même temps (à chaque fois que t est une racine strictement positive et de multiplicité impaire de P_n), donc le produit $P_n(t)Q_n(t)$ est de signe constant. On peut choisir le coefficient dominant de Q_n de telle sorte que ce produit soit toujours positif.

Remarque.— Si $s = 0$, alors $Q_n = \pm 1$.

12. b. Comme $\deg Q_n = s < n$, on déduit de **[10.]** que

$$Q_n \in \operatorname{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_{n-1}).$$

Comme les P_k sont deux à deux orthogonaux **[10.]**,

$$\forall\, 0 \leqslant k < n,\quad \langle\, P_n \,|\, P_k \,\rangle = 0$$

et donc, par linéarité à droite,

$$\langle P_n \,|\, Q_n \rangle = 0.$$

12. c. L'expression

$$P_n(t)Q_n(t)e^{-t}$$

est donc une fonction continue et positive de t et elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois (lorsque t est une racine de P_n). Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} P_n(t)Q_n(t)e^{-t}\,dt > 0,$$

ce qui contredit le fait que $\langle P_n \,|\, Q_n \rangle = 0$.

❧ On a ainsi démontré par l'absurde que $s = n$: le polynôme P_n admet exactement n racines réelles strictement positives de multiplicité 1.

13. L'application

$$\varphi = \left[P \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt = \langle P \,|\, 1 \rangle\right]$$

est une forme linéaire sur $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

❧ Les racines $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ du polynôme P_n étant deux à deux distinctes, il existe une famille $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de polynômes interpolateurs associée à ces réels. D'après la théorie de Lagrange,

$$\forall\, P \in F, \quad P = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(P)\cdot L_i.$$

❧ Par linéarité de φ,

$$\forall\, P \in F, \quad \varphi(P) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(L_i)\cdot \Phi_i(P)$$

c'est-à-dire

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(L_i)\cdot \Phi_i.$$

Cela prouve que la famille $(\Phi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre l'espace dual F^* et qu'on peut choisir

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \lambda_i = \varphi(L_i).$$

❧ Il reste à démontrer que la famille $(\Phi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre. Si

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \Phi_j$$

est la forme linéaire identiquement nulle, alors

$$\forall\, P \in F, \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j \Phi_j(P) = 0$$

et en particulier

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \Phi_j(L_i) = 0.$$

❧ Ainsi, la famille $(\Phi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une <u>base</u> de l'espace dual

$$F^* = L(F, \mathbb{R})$$

et chaque forme linéaire (en particulier la forme φ étudiée ici) se décompose de manière unique dans cette base.

❧ On a ainsi démontré que, en posant

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \lambda_i = \int_0^{+\infty} L_i(t)e^{-t}\,dt = \varphi(L_i),$$

on avait

$$\forall\, P \in F, \quad \varphi(P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi_i(P)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, P \in F, \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

> *Pour utiliser cette formule, il faut savoir calculer exactement les racines x_i du polynôme P_n et avoir déjà calculé les coefficients λ_i. Ce n'est pas une mince affaire !*

14. Considérons le polynôme

$$P = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)^2.$$

Il est clair que $\deg P = 2n$ et que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i) = 0.$$

Cependant, l'expression

$$P(t)e^{-t} = e^{-t}\prod_{i=1}^{n} (t - x_i)^2$$

est une fonction continue de t ; elle est positive pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et ne s'annule qu'en un nombre <u>fini</u> de valeurs de t. Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt > 0.$$

On a donc trouvé un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$