Composition de Mathématiques

Le 20 mars 2024 – De 13 heures à 16 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Sujet Mines

❖ Problème ❖

On identifiera systématiquement un vecteur

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

avec la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

qui représente le vecteur $\boldsymbol{x}$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.
De même, on identifiera toute matrice de $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ *à son unique coefficient et on écrira aussi bien* $M \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ *que* $M \in \mathbb{R}$.
On rappelle qu'une matrice symétrique $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *est dite* ***positive*** *lorsque*

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{x}^\top.A.\boldsymbol{x} \geqslant 0.$$

On rappelle aussi que l'ensemble des matrices symétriques positives est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Les intervalles considérés dans ce problème ne seront ni vides, ni réduits à un point. Tous les intervalles auront donc une longueur strictement positive.

Partie A. Questions de cours

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, une matrice symétrique. Démontrer que : pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1 \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{x}^\top.A.\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j.$$

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, une matrice symétrique positive. Démontrer que les valeurs propres de A sont des réels positifs ou nuls.

Partie B. Théorème de Fubini et sommes de Riemann

Soit $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$, *une application continue. On pose*

$$\forall\,(x,t) \in [a,b]\times[c,d], \quad \varphi(x,t) = \int_a^x f(u,t)\,du$$

ainsi que

$$\forall\, x \in [a,b], \quad \psi(x) = \int_c^d \varphi(x,t)\,dt.$$

*L'étude de ces deux fonctions a pour but de démontrer l'égalité suivante (**Théorème de Fubini**) :*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(u,t)\,dt\right) du = \int_c^d \left(\int_a^b f(u,t)\,du\right) dt.$$

Cette quantité sera ensuite notée simplement

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(u,t)\,du\,dt.$$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, *on pose*

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad u_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

et

$$\forall\, 0 \leqslant \ell \leqslant n, \quad t_\ell = c + \ell\frac{d-c}{n}.$$

La ***somme de Riemann*** *de rang* n *est définie par*

$$S_n(f) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} f(u_k, t_\ell).$$

3. Expliquer pourquoi l'application $[(x,y) \mapsto x]$ est continue. Représenter graphiquement l'image réciproque du segment $[a,b]$ par cette application. En déduire que le rectangle

$$[a,b]\times[c,d]$$

est l'intersection de deux parties fermées.

On admet qu'il existe un réel $C_0 \geqslant 0$ tel que

$$\forall\,(x,y) \in [a,b]\times[c,d], \qquad \big|f(x,y)\big| \leqslant C_0. \qquad (1)$$

(Une fonction continue est bornée sur toute partie compacte.)

4. Démontrer que, pour tout $x \in [a,b]$, l'application

$$[t \mapsto \varphi(x,t)]$$

est continue sur $[c,d]$.

5. Démontrer que l'application ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Expliciter sa dérivée.

6. En déduire que

$$\int_a^x \left(\int_c^d f(u,t)\,dt\right) du = \int_c^d \left(\int_a^x f(u,t)\,du\right) dt$$

pour tout $x \in [a,b]$.

7. Soient $\Omega = [a,b]\times[c,d]$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $C_1 \geqslant 0$ tel que

$$\forall\,M, M' \in \Omega, \quad \big|f(M') - f(M)\big| \leqslant C_1 \|\mathbf{MM'}\|_\infty. \qquad (\mathcal{L})$$

7. a. Démontrer que la fonction f est continue sur Ω.

7. b. Déduire de la propriété $(\mathcal{L})$ que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \iint_\Omega f(u,t)\,du\,dt.$$

*Dans la suite du problème, on **admettra** que la propriété **[7.b.]** est vraie pour toute application f continue sur Ω — même pour celles qui ne vérifient pas la propriété $(\mathcal{L})$.*

Partie C. Noyaux de type positif

Soit Ω, un ensemble quelconque (non vide). Une application

$$K : \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}$$

*s'appelle un **noyau de type positif** (qu'on pourra abréger par la suite en NTP) lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout*

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega^n,$$

la matrice

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \big(K(x_i, x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

est symétrique et positive : $\Gamma(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

8. Soit H, un espace préhilbertien réel. Démontrer que le produit scalaire

$$K = [(x,y) \mapsto \langle\, x \,|\, y \,\rangle] : H\times H \to \mathbb{R}$$

est un noyau de type positif.

Soit Ω, un ensemble non vide. On dit qu'une application

$$K : \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}$$

*vérifie la **propriété $(\mathcal{R})$** s'il existe un espace préhilbertien H et une application*

$$\varphi : \Omega \to H$$

tels que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega^2, \quad K(x,y) = \big\langle\, \varphi(x) \,\big|\, \varphi(y) \,\big\rangle.$$

9. On suppose que K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$. Démontrer que K est un noyau de type positif.

10. Réciproquement, on suppose que K est un noyau de type positif sur l'ensemble fini

$$\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

En diagonalisant la matrice $\Gamma(\mathbf{x})$, démontrer que K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$.

Dans la fin de cette partie, nous allons démontrer que le noyau

$$K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$$

défini par

$$\forall\,x,y \in [0,1], \quad K(x,y) = \min(x,y)$$

est un noyau de type positif.
Pour cela, nous notons H, l'espace vectoriel des fonctions

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

continues et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$, telles que $f(0) = 0$. (On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel.)
On rappelle qu'une fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$ lorsqu'il existe une application Df continue par morceaux sur $[0,1]$ et une subdivision

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N = 1$$

du segment $[0,1]$ telles que f soit dérivable en tout point de

$$\Omega_0 = [0,1] \setminus \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N\}$$

et que

$$\forall\,x \in \Omega_0, \quad f'(x) = Df(x).$$

11. Pour $(f,g) \in H\times H$, on pose

$$\langle\, f \,|\, g \,\rangle = \int_0^1 Df(t)Dg(t)\,dt.$$

11. a. Démontrer que l'intégrale $\langle\, f \,|\, g \,\rangle$ est bien définie.

11. b. Démontrer que l'application $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est un produit scalaire sur H.

12. Démontrer que le noyau K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$.
☞ *On pourra poser*

$$\forall\,x \in [0,1], \quad \varphi(x) = [y \mapsto K(x,y)]\,.$$

Partie D. Opérateurs à noyau

Soit $I = [a,b]$, un segment de $\mathbb{R}$. On notera $E = \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, qu'on munira du produit scalaire habituel, défini par

$$\forall\,f,g \in E, \quad \langle\, f \,|\, g \,\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

La norme associée à ce produit scalaire sera notée $\|\cdot\|$.

Étant donnée une application symétrique et continue

$$K : I \times I \to \mathbb{R},$$

on définit une application u_K *sur* E *en posant*

$$\forall f \in E, \forall x \in I, \quad u_K(f)(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)\,dt.$$

Pour tout $x \in I$, *l'application partielle*

$$K_x = [t \mapsto K(x,t)]$$

appartient à E *et*

$$\forall f \in E, \forall x \in I, \quad u_K(f)(x) = \langle K_x \,|\, f \rangle.$$

13. Soit K', une application symétrique et continue de $I \times I$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall f \in E, \quad u_K(f) = u_{K'}(f).$$

Démontrer que $K = K'$.

14. Démontrer que u_K est un endomorphisme de E, puis que cet endomorphisme est une application linéaire continue de E dans E lorsque E est muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire.

15. Démontrer que

$$\forall f, g \in E, \quad \langle u_K(f) \,|\, g \rangle = \langle f \,|\, u_K(g) \rangle.$$

En déduire que : si les réels λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u_K et si f_λ et f_μ sont deux vecteurs propres associés, alors

$$\langle f_\lambda \,|\, f_\mu \rangle = 0.$$

16. On suppose de plus que K est un noyau de type positif. En utilisant le résultat établi en **[7.b.]**, démontrer que

$$\forall f \in E, \quad \langle u_K(f) \,|\, f \rangle \geqslant 0.$$

Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de u_K ?

Partie E. Théorème de Mercer

L'objectif de cette dernière partie est de démontrer un cas particulier du Théorème de Mercer (1909). Dorénavant, on considère le segment $I = [0,1]$ *et l'espace vectoriel*

$$E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$$

muni du produit scalaire défini par

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f \,|\, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

On a démontré plus haut **[9.]**, **[12.]** *que le noyau défini par*

$$\forall (x,t) \in [0,1], \quad K(x,t) = \min(x,t)$$

était de type positif.
Ce noyau va nous servir à déterminer les applications g *de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur le segment* $[0,1]$ *qui vérifient le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} g'' = -f \\ g(0) = g'(1) = 0 \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

où f *est une fonction donnée dans* E.

17. Démontrer que K est continue sur $[0,1] \times [0,1]$.

18. Démontrer que le problème $(\mathcal{P})$ possède une, et une seule, solution g, donnée par

$$g = u_K(f).$$

19. Déterminer les valeurs propres de u_K. *On les exprimera sous la forme d'une suite strictement décroissante* $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, démontrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k est une droite vectorielle et donner un vecteur unitaire e_k qui engendre ce sous-espace propre.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$F_n = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_n)$$

et on note p_n, *la projection orthogonale sur* F_n.

20. En admettant la relation

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^4} = \frac{\pi^4}{6}, \tag{2}$$

vérifier l'égalité suivante.

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} K(x,t)^2\,dx\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^2 \tag{3}$$

21. Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|^2\,dx = 0.$$

(L'application K_x a été définie dans le préambule de la **Partie D**.)

22. En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \,|\, f \rangle \cdot e_k \right\|^2 = 0$$

pour toute fonction $f \in E$.

23. Démontrer que la série de fonctions

$$\sum \lambda_k \langle e_k \,|\, f \rangle \cdot e_k$$

converge uniformément sur le segment I, puis que

$$\forall x \in I, \quad u_K(f)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda \langle e_k \,|\, f \rangle \cdot e_k(x).$$

24. Démontrer que

$$\forall (x,y) \in I \times I, \quad K(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x) e_k(y). \tag{4}$$

☞ *On posera*

$$K'(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x) e_k(y)$$

et on montrera que $u_K = u_{K'}$.

25. En déduire la **Formule de la trace** :

$$\int_0^1 K(x,x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k. \tag{5}$$

Solution ❀ Noyaux de type positif

Partie A. Questions de cours

1. Par définition du produit matriciel, la colonne

$$AX = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

est définie par

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j.$$

Par conséquent,

$$X^\top.A.X = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{i,j} y_j.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de A. Il existe donc un vecteur $x_0 \neq 0$ tel que $Ax_0 = \lambda x_0$. On en déduit que

$$x_0^\top.A.x_0 = x_0^\top.(\lambda \cdot x_0) = \lambda \cdot (x_0^\top.x_0) = \lambda\, \|x_0\|^2.$$

Comme $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad x^\top.A.x \geqslant 0$$

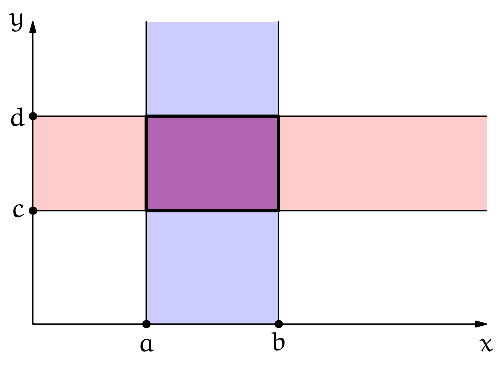
et donc $\lambda\, \|x_0\|^2 \geqslant 0$. Or $\|x_0\|^2 > 0$ (puisque x_0 n'est pas le vecteur nul) et donc

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Partie B. Théorème de Fubini et sommes de Riemann

3. L'application $[(x, y) \mapsto x]$ est une application linéaire sur $\mathbb{R}^2$, espace vectoriel de dimension finie. Elle est donc continue (quelle que soit la norme choisie sur $\mathbb{R}^2$).

❧ La coordonnée x vérifie $a \leqslant x \leqslant b$ si, et seulement si, le couple (x, y) appartient à la bande verticale $[a, b] \times \mathbb{R}$.



❧ En tant qu'image réciproque du fermé $[a, b]$ par l'application continue $[(x, y) \mapsto x]$, la bande $[a, b] \times \mathbb{R}$ est fermée. De même, la bande horizontale $\mathbb{R} \times [c, d]$ est fermée et comme

$$[a, b] \times [c, d] = ([a, b] \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times [c, d]),$$

le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ est fermé en tant qu'intersection de deux parties fermées.

> *Dans un espace de dimension finie, toute partie fermée et bornée est compacte. Le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ est donc une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.*

4. Fixons $x \in [a, b]$. L'application $[t \mapsto \varphi(x, t)]$ est alors une intégrale fonction du paramètre t, nous allons donc appliquer le théorème de continuité.

❧ **(Intégrabilité)** — Pour tout $t \in [c, d]$, la fonction

$$\begin{array}{ccccc} [a, b] & \longrightarrow & [a, b] \times [c, d] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & (u, t) & \longmapsto & f(u, t) \end{array}$$

est continue et par conséquent, elle est intégrable sur le segment $[a, x] \subset [a, b]$.

❧ **(Continuité)** — Pour tout $u \in [a, x]$, la fonction

$$\begin{array}{ccccc} [c, d] & \longrightarrow & [a, b] \times [c, d] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (u, t) & \longmapsto & f(u, t) \end{array}$$

est continue.

❧ **(Domination)** — La fonction f est continue sur le compact $[a, b] \times [c, d]$, donc elle est bornée. Il existe donc une constante C_0 telle que

$$\forall\, u \in [a, x],\ \forall\, t \in [c, d], \qquad \big|f(u, t)\big| \leqslant C_0$$

et la fonction majorante $[u \mapsto C_0]$ (qui est indépendante de la variable t) est intégrable sur $[a, x]$ (puisque toute fonction constante est intégrable sur un segment).

❧ D'après le Théorème de continuité, la fonction $[t \mapsto \varphi(x, t)]$ est continue sur le segment $[c, d]$ (quel que soit $x \in [a, b]$).

5. La fonction ψ est une intégrale fonction du paramètre x. Nous allons donc appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$.

❧ **(Existence)** — D'après **[4.]**, pour tout $x \in [a, b]$, la fonction $[t \mapsto \varphi(x, t)]$ est continue sur le segment $[c, d]$. Par conséquent, elle est intégrable et

$$\psi(x) = \int_c^d \varphi(x, t)\, dt$$

est bien définie.

❧ **(Régularité)** — Soit $t \in [c, d]$. Comme la fonction $[u \mapsto f(u, t)]$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$ **[4.]**, la fonction de la borne supérieure

$$\left[x \mapsto \varphi(x, t) = \int_a^x f(u, t)\, du\right]$$

est une primitive de $[u \mapsto f(u, t)]$. Par conséquent, la fonction $[x \mapsto \varphi(x, t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et

$$\forall\, x \in [a, b], \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = f(x, t).$$

❧ **(Intégrabilité)** — Pour tout $x \in [a, b]$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = f(x, t)\right]$$

est continue sur le segment $[c, d]$ **[4.]** et donc intégrable sur cet intervalle.

❧ **(Domination)** — Comme on l'a vu à la question précédente,

$$\forall\, x \in [a, b],\ \forall\, t \in [c, d], \qquad \left|\frac{\partial x}{\partial \varphi}(x, t)\right| = \big|f(x, t)\big| \leqslant C_0.$$

Comme plus haut, le majorant $[t \mapsto C_0]$ est indépendant du paramètre x et intégrable sur le segment $[c, d]$.

❧ D'après le Théorème de dérivation sous le signe $\int$, la fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall\, x \in [a,b], \quad \psi'(x) = \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_c^d f(x,t)\,dt.$$

6. D'après la question précédente, la fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. On déduit alors du Théorème fondamental que

$$\begin{aligned}\forall\, x \in [a,b], \quad \psi(x) - \psi(a) &= \int_a^x \psi'(u)\,du \\ &= \int_a^x \Big(\int_c^d f(u,t)\,dt\Big)\,du.\end{aligned}$$

Mais, par définition,

$$\forall\, x \in [a,b], \quad \psi(x) = \int_c^d \Big(\int_a^x f(u,t)\,du\Big)\,dt$$

et, en particulier, $\psi(a) = 0$ (intégrale de la fonction nulle).

On en déduit le Théorème de Fubini pour $x = b$.

7. a. L'énoncé suppose ici que f est lipschitzienne et toute fonction lipschitzienne est continue : si le point M' tend vers le point M dans Ω, alors $\|\boldsymbol{MM'}\|_\infty$ tend vers 0 et, par encadrement, le réel $f(M')$ tend vers le réel $f(M)$.

7. b. On doit commencer par observer que $S_n(f)$ est l'intégrale d'une sorte de fonction en escalier (fonction de deux variables) :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \Big(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u_k,t_\ell)\,dt\Big)\,du.$$

Pour les intégrales simples ou pour les intégrales doubles, la méthode des rectangles repose toujours sur le même principe.

On décompose l'intégrale double avec la relation de Chasles pour pouvoir la comparer à la somme $S_n(f)$.

$$\begin{aligned}\int_a^b \Big(\int_c^d f(u,t)\,dt\Big)\,du &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \Big(\int_c^d f(u,t)\,dt\Big)\,du \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \Big(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u,t)\,dt\Big)\,du\end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, la différence

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(u,t)\,dt\Big)\,du - S_n(f)$$

est donc égale à

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \Big(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u,t) - f(u_k,t_\ell)\,dt\Big)\,du.$$

Par inégalité triangulaire, la valeur absolue

$$\left|\int_a^b \Big(\int_c^d f(u,t)\,dt\Big)\,du - S_n(f)\right|$$

est majorée par

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \Big(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \big|f(u,t) - f(u_k,t_\ell)\big|\,dt\Big)\,du.$$

Pour tous $0 \leqslant k, \ell < n$, l'hypothèse lipschitzienne faite sur f nous donne alors

$$\begin{aligned}&\forall\,(u,t) \in [u_k, u_{k+1}] \times [t_\ell, t_{\ell+1}],\\ &\qquad \big|f(u,t) - f(u_k,t_\ell)\big| \leqslant C_1 \max\big\{|u-u_k|, |t-t_\ell|\big\} \\ &\qquad\qquad \leqslant \frac{C_1 \max\{b-a, d-c\}}{n}.\end{aligned}$$

On en déduit que, quels que soient $0 \leqslant k, \ell < n$, l'intégrale itérée

$$\int_{u_k}^{u_{k+1}} \Big(\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \big|f(u,t) - f(u_k,t_\ell)\big|\,dt\Big)\,du$$

est majorée par

$$\frac{C_1 \max\{b-a, d-c\}}{n} \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de k et de ℓ. Comme il y a exactement n^2 termes dans la somme, on en déduit que

$$\left|\int_a^b \Big(\int_c^d f(u,t)dt\Big)du - S_n(f)\right| \leqslant \frac{C_1[\max\{(b-a),(d-c)\}]^3}{n}$$

et par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \iint_\Omega f(u,t)\,du\,dt.$$

Partie C. Noyaux de type positif

8. Par symétrie du produit scalaire, la matrice $\Gamma(\boldsymbol{x})$ est symétrique, quel que soit $\boldsymbol{x} \in H^n$.

❧ Soit $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. D'après **[1.]** et la bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^\top.\Gamma(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{\alpha} &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \alpha_i \left\langle x_i \,|\, x_j \right\rangle \alpha_j \\ &= \Big\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \,\Big|\, \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \Big\rangle = \Big\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \Big\|^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que, pour toute liste

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in H^n,$$

la matrice symétrique $\Gamma(\boldsymbol{x})$ était positive.

❧ Donc K est bien un noyau de type positif.

9. Tout d'abord, l'application K est symétrique : quels que soient les éléments x et y de Ω,

$$\begin{aligned}K(y,x) &= \left\langle \varphi(y) \,|\, \varphi(x) \right\rangle && \text{(définition de } K)\\ &= \left\langle \varphi(x) \,|\, \varphi(y) \right\rangle && \text{(symétrie du produit scalaire)}\\ &= K(x,y). && \text{(définition de } K)\end{aligned}$$

Par conséquent, toutes les matrices $\Gamma(\boldsymbol{x})$ sont symétriques.

❧ Pour tout entier $m \geqslant 1$, pour toute liste

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega^m$$

et tout vecteur $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^\top.\Gamma(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{\alpha} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \left\langle \varphi(x_i) \,\middle|\, \varphi(y_j) \right\rangle \alpha_j \qquad \textbf{[1.]} \\ &= \Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(x_i) \Big\|^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

donc la matrice symétrique $\Gamma(\boldsymbol{x})$ est bien positive.

❧ On a ainsi démontré qu'une application K qui vérifie la propriété $\mathcal{R}$ est toujours un noyau de type positif.

10. On considère ici un noyau de type positif K sur un ensemble fini

$$\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Par définition, la matrice

$$\Gamma(\boldsymbol{x}) = \big(K(x_i, x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

est une matrice symétrique réelle positive. D'après le Théorème spectral, il existe une matrice orthogonale Q et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\Gamma(\boldsymbol{x}) = Q^\top.\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).Q$$

et comme $\Gamma(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, les valeurs propres λ_k sont toutes des réels positifs. On peut donc factoriser la matrice $\Gamma(\boldsymbol{x})$ de deux manières en posant

$$\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) :$$

d'une part,

$$\Gamma(\boldsymbol{x}) = Q^\top.\Delta^2.Q = (Q\Delta)^\top.(Q\Delta)$$

et d'autre part, comme Q est orthogonale,

$$\Gamma(\boldsymbol{x}) = Q^\top.\Delta.Q.Q^\top.\Delta.Q = (Q^\top.\Delta.Q)^\top.(Q^\top.\Delta.Q).$$

Dans les deux cas, on a exhibé une matrice $P_0 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\Gamma(\boldsymbol{x}) = P_0^\top.P_0.$$

> *Dans la seconde factorisation, la matrice*
>
> $$P_0 = Q^\top.\Delta.Q$$
>
> *est symétrique réelle (puisque Q est orthogonale). Ce n'est pas le cas dans la première factorisation (et c'est sans importance).*

❧ Considérons maintenant un espace euclidien H de dimension n, dont le produit scalaire sera noté $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$, muni d'une base orthonormée $\mathscr{B}_H = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

On considère alors la famille $(y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de vecteurs de E définie par

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_H}(y_1, \dots, y_n) = P_0.$$

Comme la base $\mathscr{B}_H$ est une <u>base orthonormée</u> de H,

$$P_0^\top.P_0 = \big(\langle y_i \,|\, y_j \rangle_H\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Il nous reste à définir l'application $\varphi : \Omega \to H$ en posant

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \varphi(x_k) = y_k$$

pour obtenir enfin que

$$\Gamma(\boldsymbol{x}) = \big(\langle \varphi(x_i) \,|\, \varphi(x_j) \rangle_H\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

c'est-à-dire (puisque $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$) :

$$\forall\, x, y \in \Omega, \quad K(x, y) = \langle \varphi(x) \,|\, \varphi(y) \rangle_H.$$

> *Question particulièrement déroutante : le choix de l'espace préhilbertien est sans intérêt (il suffit que sa dimension soit au moins égale à n) et l'application φ étant définie sur un ensemble* fini *de cardinal n, il s'agit en fait de choisir une famille de n vecteurs dans l'espace H.*
> *De plus, comme on l'a vu, la factorisation de la matrice $\Gamma(\boldsymbol{x})$ n'est pas unique !*

> *On pourra retenir le résultat sous une forme peut-être plus familière : toute matrice symétrique positive $\Gamma \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est la matrice de Gram d'une famille de n vecteurs bien choisis dans un espace préhilbertien bien choisi.*
>
> $$\Gamma = \big(\langle y_i \,|\, y_j \rangle_H\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

11. a. La fonction Df *n'est pas* bien définie ! En effet, comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, sa dérivée f' n'est a priori pas définie en chaque point de $[0, 1]$ et la fonction Df peut être librement modifiée aux points α_k.

Néanmoins, s'il existe deux fonctions continues par morceaux $(Df)_1$ et $(Df)_2$ et deux subdivisions

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_M = 1 \\ &= \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_N = 1 \end{aligned}$$

(qui n'ont peut-être pas le même nombre de points...) telles que

$$\begin{cases} \forall\, x \in \Omega_1, & f'(x) = (Df)_1(x) \\ \forall\, x \in \Omega_2, & f'(x) = (Df)_2(x) \end{cases}$$

avec $\Omega_1 = [0, 1] \setminus \{\alpha_i\}_{0 \leqslant i \leqslant M}$ et $\Omega_2 = [0, 1] \setminus \{\beta_i\}_{0 \leqslant i \leqslant N}$, alors

$$\forall\, x \in \Omega_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2, \quad f'(x) = (Df)_1(x) = (Df)_2(x)$$

donc les deux fonctions $(Df)_1$ et $(Df)_2$ sont égales presque partout (c'est-à-dire égales sur $[0, 1]$ sauf peut-être en un nombre FINI de points).

❧ Par conséquent, les deux intégrandes

$$(Df)_1(t)(Dg)_1(t) \quad \text{et} \quad (Df)_2(t)(Dg)_2(t)$$

sont des fonctions continues par morceaux de $t \in [0, 1]$ qui sont égales presque partout sur $[0, 1]$, donc les deux intégrales

$$\int_0^1 (Df)_1(t)(Dg)_1(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 (Df)_2(t)(Dg)_2(t)\,dt$$

sont bien définies et ont la même valeur.

Autrement dit, l'intégrale $\langle f \,|\, g \rangle$ est bien définie.

> *Ici aussi, il était facile de passer à côté de la difficulté soulevée par la définition de l'intégrale, d'autant plus que la notation* $\mathrm{D}f$ *utilisée par l'énoncé sous-entend plus ou moins qu'il n'existe qu'une seule fonction* $\mathrm{D}f$ *possible.*
> *On pourra retenir qu'il n'existe* presque *qu'une seule fonction* $\mathrm{D}f$ *possible et que, comme on ne s'en sert que dans une intégrale, c'est* comme s'*il n'en existait qu'une seule.*

11. b. D'après la question précédente, $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est bien une application de $H\times H$ dans $\mathbb{R}$.

D'après les propriétés de l'intégrale, il est clair que cette application est bilinéaire, symétrique et positive.

Considérons pour finir une fonction $f\in H$ telle que $\langle f\,|\,f\rangle=0$. Avec les notations de l'énoncé,

$$\langle f\,|\,f\rangle=\int_0^1\big[\mathrm{D}f(t)\big]^2\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}\big(f'(t)\big)^2\,dt.$$

On dispose ainsi d'une somme de réels positifs et cette somme est nulle, donc chaque terme est nul :

$$\forall\,0\leqslant k<n,\quad\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}\big(f'(t)\big)^2\,dt=0.$$

Sur chaque intervalle <u>ouvert</u> $]\alpha_k,\alpha_{k+1}[$, la fonction $(f')^2$ est continue et positive. De plus, $\alpha_k<\alpha_{k+1}$ et l'intégrale sur cet intervalle est nulle, donc

$$\forall\,\alpha_k<t<\alpha_{k+1},\quad f'(t)=0.$$

On en déduit que la fonction f est constante sur chaque intervalle ouvert :

$$\forall\,0\leqslant k<n,\ \exists\,C_k\in\mathbb{R},\ \forall\,\alpha_k<t<\alpha_{k+1},\quad f(t)=C_k.$$

Comme la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, alors les constantes C_k sont toutes égales :

$$C_{k-1}=\lim_{\substack{t\to\alpha_k\\ <}}f(t)=f(\alpha_k)=\lim_{\substack{t\to\alpha_k\\ >}}f(t)=C_k.$$

Et comme $f(0)=0$, on en déduit que

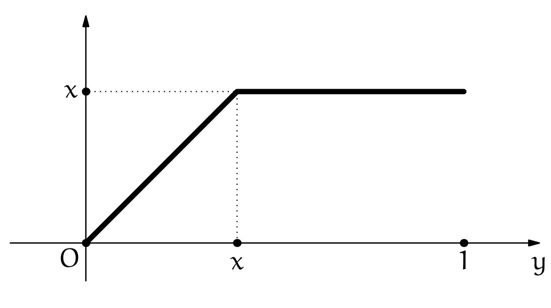
$$\forall\,t\in[0,1],\quad f(t)=0.$$

Donc $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est définie positive : c'est bien un produit scalaire.

12. Ici, $\Omega=[0,1]$.

❧ On considère la fonction φ définie par l'énoncé. Il est clair que, pour tout $x\in[0,1]$, la fonction $\varphi(x)$ est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$ avec

$$\begin{cases}\forall\,0<y<x, & [\mathrm{D}\varphi(x)](y)=1\\ \forall\,x<y<1, & [\mathrm{D}\varphi(x)](y)=0.\end{cases}$$



Ainsi, φ est bien une application de $\Omega=[0,1]$ dans H.

❧ D'après les formules précédentes, quels que soient x et y dans Ω,

$$\begin{aligned}\big\langle\,\varphi(x)\,\big|\,\varphi(y)\,\big\rangle&=\int_0^1\mathbb{1}_{]0,x[}(t)\mathbb{1}_{]0,y[}(t)\,dt\\&=\int_0^{\min\{x,y\}}dt=\min\{x,y\}=K(x,y).\end{aligned}$$

Le noyau considéré vérifie donc la propriété $(\mathcal{R})$.

❧ D'après **[9.]**, l'application K est un noyau de type positif.

Partie D. Opérateurs à noyau

13. Par hypothèse, la fonction K est continue sur $I\times I$. Par conséquent, pour tout $x\in I$, la fonction K_x définie par

$$\begin{array}{ccccc}I&\longrightarrow&I\times I&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ t&\longmapsto&(x,t)&\longmapsto&K(x,t)\end{array}$$

est continue sur I et $K_x\in E$ comme l'indique l'énoncé.

❧ Soit $x\in I$. L'hypothèse faite sur K et K' se traduit donc par

$$\forall\,f\in E,\quad\langle\,K_x\,|\,f\,\rangle=\langle\,K'_x\,|\,f\,\rangle$$

et donc, par linéarité à gauche du produit scalaire,

$$\forall\,f\in E,\quad\langle\,K_x-K'_x\,|\,f\,\rangle=0.$$

Le seul vecteur orthogonal à E est le vecteur nul, donc

$$\forall\,x\in I,\quad K_x=K'_x.$$

Autrement dit,

$$\forall\,(x,t)\in I\times I,\quad K(x,t)=K'(x,t)$$

ou encore $K=K'$.

14. Nous allons une fois encore appliquer le Théorème de continuité des intégrales en fonction d'un paramètre.

❧ **(Intégrabilité) —** Pour tout $x\in I$, la fonction

$$[t\mapsto K(x,t)f(t)=K_x(t)f(t)]$$

est continue sur le segment I en tant que produit de deux fonctions continues (on a expliqué plus haut pourquoi la fonction K_x était continue sur I), donc elle est intégrable sur le segment I.

❧ **(Continuité) —** Pour tout $t\in I$, la fonction

$$[x\mapsto K(x,t)f(t)]$$

est continue sur I (pour les mêmes raisons que celles qu'on a exposées en **[13.]**).

❧ **(Domination) —** La fonction $f\in E$ est continue sur le segment $I=[a,b]$, donc elle est bornée sur ce segment.

La fonction K est continue sur le compact $I\times I$ **[3.]**, donc elle est bornée : il existe une constante $M>0$ telle que

$$\forall\,(x,t)\in I\times I,\quad\big|K(x,t)f(t)\big|\leqslant M.\|f\|_\infty.$$

Le majorant est indépendant du paramètre x et, en tant que fonction de t, c'est une fonction intégrable sur le segment I.

❧ D'après le Théorème de continuité, la fonction

$$u_K(f) = \left[x \mapsto \int_a^b K(x,t)f(t)\,dt\right]$$

est continue sur I. On a ainsi démontré que u_K était bien une application de E dans E.

❧ Par linéarité de l'intégrale, il est clair que u_K est une application linéaire.

❧ Par définition du produit scalaire,

$$\|u_K(f)\|^2 = \int_a^b \big[u_K(f)(x)\big]^2\,dx.$$

Comme l'indique l'énoncé dans le préambule de cette partie, pour tout $x \in I$,

$$u_K(f)(x) = \langle K_x \,|\, f \rangle.$$

D'après l'inégalité de Schwarz et la majoration précédente de $|K(x,t)|$,

$$\begin{aligned} \forall\, x \in [a,b], \quad \big[u_K(f)(x)\big]^2 &\leqslant \|K_x\|^2\|f\|^2 \\ &\leqslant M^2(b-a)\cdot\|f\|^2. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|u_K(f)\|^2 \leqslant M^2(b-a)^2\cdot\|f\|^2$$

et donc que

$$\forall\, f \in E, \quad \|u_K(f)\| \leqslant M(b-a)\cdot\|f\|.$$

Cet encadrement prouve que l'endomorphisme u_K est continu (pour la norme euclidienne définie sur E) avec

$$|||u_K||| \leqslant M(b-a).$$

15. Soient f et g, deux fonctions continues sur I.
Alors les trois fonctions

$$\begin{array}{ccccc} I\times I & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & t & \longmapsto & f(t) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I\times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & K(x,t) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} I\times I & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & x & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

sont continues. Par produit, la fonction

$$[(x,t) \mapsto \varphi(x,t) = K(x,t)f(t)g(x)]$$

est donc continue sur $I \times I$. On peut donc lui appliquer le Théorème de Fubini établi en **[6.]** :

$$\int_a^b\Big(\int_a^b \varphi(x,t)\,dt\Big)\,dx = \int_a^b\Big(\int_a^b \varphi(x,t)\,dx\Big)\,dt.$$

La symétrie des matrices $\Gamma(\boldsymbol{x})$ prouve que

$$\forall\,(x,t) \in I\times I, \quad K(x,t) = K(t,x).$$

Donc l'égalité précédente signifie que l'intégrale itérée

$$\int_a^b\Big(\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt\Big)g(x)\,dx$$

est égale à l'intégrale itérée

$$\int_a^b\Big(\int_a^b K(t,x)g(x)\,dx\Big)f(t)\,dt.$$

Autrement dit,

$$\langle u_K(f) \,|\, g \rangle = \langle u_K(g) \,|\, f \rangle = \langle f \,|\, u_K(g) \rangle.$$

❧ On en déduit que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux comme on l'a fait en cours.

Si $u_K(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ et si $u_K(f_\mu) = \mu f_\mu$, alors

$$\lambda\langle f_\lambda \,|\, f_\mu \rangle = \langle u_K(f_\lambda) \,|\, f_\mu \rangle = \langle f_\lambda \,|\, u_K(f_\mu) \rangle = \mu\langle f_\lambda \,|\, f_\mu \rangle$$

et donc

$$(\lambda-\mu)\cdot\langle f_\lambda \,|\, f_\mu \rangle = 0.$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $\langle f_\lambda \,|\, f_\mu \rangle = 0$.

> *On ne peut pas appliquer le résultat établi en cours, car seul le cas d'un espace de dimension finie est au programme... La démonstration qui précède montre que la dimension de l'espace ne fait rien à l'affaire.*

16. Soit $f \in E$. D'après **[15.]**,

$$\langle u_K(f) \,|\, f \rangle = \iint_{[a,b]\times[a,b]} K(x,t)f(t)f(x)\,dx\,dt$$

et d'après **[7.b.]** (en conservant les notations de cette question),

$$\langle u_K(f) \,|\, f \rangle = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} K(u_k,t_\ell)f(u_k)f(t_\ell).$$

Ici, $[c,d] = [a,b]$, donc $t_\ell = u_\ell$ pour tout $0 \leqslant \ell < n$. En posant

$$\boldsymbol{x} = (u_k)_{0\leqslant k<n} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{y} = \big(f(u_k)\big)_{0\leqslant k<n},$$

on remarque alors que

$$\langle u_K(f) \,|\, f \rangle = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)^2}{n^2}\boldsymbol{y}^\top.\Gamma(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{y}.$$

Par hypothèse, la matrice symétrique $\Gamma(\boldsymbol{x})$ est positive, donc

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{(b-a)^2}{n^2}\boldsymbol{y}^\top.\Gamma(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{y} \geqslant 0$$

et par passage à la limite,

$$\forall\, f \in E, \qquad \langle u_K(f) \,|\, f \rangle \geqslant 0.$$

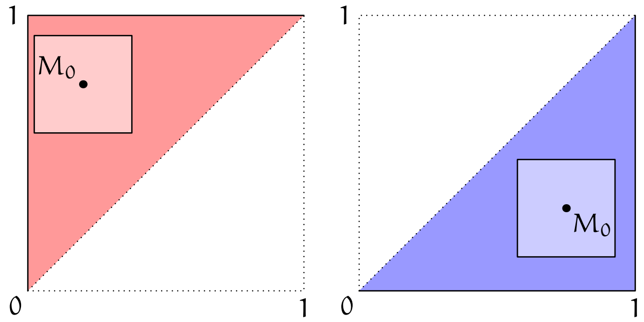
❧ En reprenant la démonstration de **[2.]**, on en déduit que les valeurs propres de u_K sont des réels positifs.

Partie E. Théorème de Mercer

17. Soit $M_0 = (x_0, t_0) \in [0,1] \times [0,1]$.

❧ Si $0 \leqslant x_0 < t_0 \leqslant 1$, alors sur un voisinage de M_0, la fonction K coïncide avec la fonction $[(x,t) \mapsto x]$, qui est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc K est continue au point M_0.

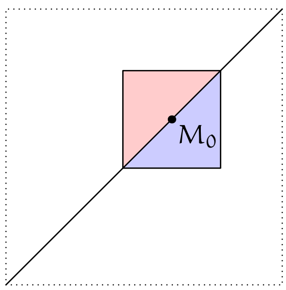
De même, si $0 \leqslant t_0 < x_0 \leqslant 1$, alors sur un voisinage de M_0, la fonction K coïncide avec la fonction $[(x,t) \mapsto t]$, qui est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc K est continue au point M_0.



❧ Enfin, si $x_0 = t_0$, alors $K(M_0) = x_0 = t_0$.

Pour tout point $M = (x,t)$, le réel $K(M)$ est égal tantôt à x, tantôt à t (selon où se trouve le point M par rapport à la diagonale). Donc

$$\left|K(M) - K(M_0)\right| = |x - x_0| \quad \text{ou} \quad |t - t_0|.$$



Dans tous les cas, on a

$$\left|K(M) - K(M_0)\right| \leqslant \|\mathbf{M_0M}\|_\infty$$

ce qui prouve que

$$\lim_{M \to M_0} K(M) = K(M_0)$$

et donc que K est continue au point M_0.

❧ On a démontré que la fonction K était continue en chaque point $M_0 \in I \times I$, donc K est continue sur $I \times I$.

18. Unicité — Si deux fonctions g et h vérifient le problème $(\mathcal{P})$, alors

$$\forall\, x \in I, \qquad (g-h)''(x) = 0,$$

donc la fonction $(g-h)$ est affine sur le segment $I = [0,1]$:

$$\exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, x \in [0,1], \quad (g-h)(x) = ax + b.$$

Or $b = (g-h)(0) = 0$ et $a = (g-h)'(1) = 0$, donc $g = h$.

Le problème $(\mathcal{P})$ admet donc au plus une solution.

Existence — Comme la fonction K est symétrique et continue **[17.]**, l'application u_K est bien définie.

D'après la relation de Chasles, pour tout $x \in I = [0,1]$,

$$\begin{aligned} u_K(f)(x) &= \int_0^1 K(x,t)f(t)\,dt \\ &= \int_0^x tf(t)\,dt + \int_x^1 xf(t)\,dt \\ &= \int_0^x tf(t)\,dt + x\int_x^1 f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Comme f et $[t \mapsto tf(t)]$ sont continues sur l'intervalle $[0,1]$, on déduit du Théorème fondamental que u_K est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que

$$\begin{aligned} \big[u_K(f)\big]'(x) &= xf(x) + \int_x^1 f(t)\,dt - xf(x) \\ &= \int_x^1 f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Cela prouve que $u_K(f)$ est en fait de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \big[u_K(f)\big]''(x) = -f(x).$$

De plus, il est clair que $u_K(f)(0) = 0$ et, d'après l'expression de la dérivée, $[u_K(f)]'(1) = 0$.

Ainsi, la fonction $u_K(f)$ est bien une solution du problème $(\mathcal{P})$.

19. Par **[12.]** et **[9.]**, la fonction K est un noyau de type positif. D'après **[16.]**, les valeurs propres de u_K sont positives.

❧ Si $u_K(f) = 0 \cdot f$, alors la fonction nulle $u_K(f)$ est la seule solution du problème $(\mathcal{P})$ **[18.]**, donc

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = -\big[u_K(f)\big]''(x) = 0.$$

Le noyau de u_K étant réduit à la fonction nulle (= le vecteur nul de l'espace E), on en déduit que 0 n'est pas valeur propre et donc que les valeurs propres de u_K sont *strictement positives*.

❧ **(Analyse)** — Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, une valeur propre de u_K. Il existe donc une fonction $f \in E$, non identiquement nulle, telle que $u_K(f) = \lambda \cdot f$. Comme $u_K(f)$ est la solution de $(\mathcal{P})$, alors

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \big[u_K(f)\big]''(x) = \lambda \cdot f''(x) = -f(x)$$

et $(\lambda f)(0) = (\lambda f)'(1) = 0$. Comme $\lambda > 0$, on peut poser

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

et en déduire que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f''(x) + \omega^2 f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = f'(1) = 0.$$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x.$$

La condition $f(0) = 0$ se traduit par $A = 0$ et la condition $f'(1) = 0$ équivaut à $B\cos\omega = 0$. Comme la fonction f n'est pas identiquement nulle, il faut donc $B \neq 0$ et $\cos\omega = 0$, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\omega = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

(On rappelle que $\omega > 0$.)

On a ainsi identifié les seules valeurs propres *possibles* et on a démontré que, pour toute valeur propre λ de u_K, le sous-espace propre était la droite vectorielle dirigée par la fonction

$$\left[x \mapsto \sin \frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right].$$

❧ **(Synthèse) —** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\omega_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \lambda_k = \frac{1}{\omega_k^2}, \quad f_k = [x \mapsto \sin \omega_k x].$$

D'après les calculs qui précèdent, $f_k(0) = f_k'(1) = 0$ et

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad \lambda_k f_k''(x) = -f_k(x).$$

Autrement dit, $\lambda_k f_k$ est une solution du problème $(\mathcal{P})$ associé à la fonction $f = f_k$. D'après **[18.]**, $u_K(f)$ est la seule solution de $(\mathcal{P})$, donc

$$u_K(f_k) = \lambda_k f_k.$$

Comme f_k n'est pas la fonction nulle, on a démontré que λ_k était bien une valeur propre de u_K.

❧ **Conclusion —** Le spectre de u_K est donc l'ensemble des

$$\lambda_k = \frac{1}{(\pi/2 + k\pi)^2}$$

pour $k \in \mathbb{N}$ et le sous-espace propre de u_K associé à la valeur propre λ_k est la droite vectorielle $\mathbb{R} \cdot f_k$.

❧ **(Normalisation) —** En linéarisant, on vérifie que

$$\|f_k\|^2 = \int_0^1 \sin^2 \omega_k x \, dx = \frac{1}{2}$$

puisque $\sin 2\omega_k = \sin(\pi + 2k\pi) = 0$.

Le sous-espace propre associé à λ_k est donc dirigé par le vecteur unitaire

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad e_k = \left[x \mapsto \sqrt{2} \sin \frac{x}{\sqrt{\lambda_k}}\right].$$

> *Une droite vectorielle admet une infinité de vecteurs directeurs, mais seulement deux vecteurs directeurs unitaires : on a le choix entre e_k et $-e_k$.*

20. D'après **[19.]**, $\lambda_k^2 = \mathcal{O}(k^{-4})$ lorsque k tend vers $+\infty$, donc la série $\sum \lambda_k^2$ est convergente (comparaison à une série de Riemann). On déduit de la formule admise par l'énoncé que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^2 = \frac{1}{\pi^4} \cdot \frac{\pi^4}{6} = \frac{1}{6}.$$

❧ Par ailleurs, d'après le Théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0,1]} K(x,t)^2 \, dx \, dt &= \int_0^1 \Big(\int_0^1 K(x,t)^2 \, dx\Big) \, dt \\ &= \int_0^1 \Big(\int_0^t x^2 \, dx + \int_t^1 t^2 \, dx\Big) \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^3}{3} + t^2(1-t) \, dt = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Donc

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} K(x,t)^2 \, dx \, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^2.$$

21. On a déjà remarqué que $K_x \in E$ **[12.]** pour tout $x \in I$.

❧ Soit $x \in [0, 1]$.

Comme $(e_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une $\boxed{\text{base orthonormée}}$ de F_n,

$$p_n(K_x) = \sum_{k=0}^{n} \langle e_k \,|\, K_x \rangle \cdot e_k.$$

De plus, par définition de la projection orthogonale sur F_n,

$$K_x = \underbrace{p_n(K_x)}_{\in F_n} + \underbrace{\big(K_x - p_n(K_k)\big)}_{\in F_n^\perp}.$$

On déduit du Théorème de Pythagore que

$$\|K_x\|^2 = \big\|p_n(K_x)\big\|^2 + \big\|K_x - p_n(K_x)\big\|^2$$

puis que

$$\big\|K_x - p_n(K_x)\big\|^2 = \|K_x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \langle e_k \,|\, K_x \rangle^2$$

(expression de la norme dans une base orthonormée).

❧ Comme K est continue sur $I \times I$ **[17.]**, on déduit de **[4.]** que l'application

$$\left[x \mapsto \|K_x\|^2 = \int_0^1 K(x,t)^2 \, dt\right]$$

est continue sur le segment I. Donc l'intégrale

$$\int_0^1 \|K_x\|^2 \, dx = \int_0^1 \Big(\int_0^1 K(x,t)^2 \, dt\Big) \, dx$$

est bien définie. D'après le Théorème de Fubini (continuité de K à nouveau) et **[20.]**,

$$\int_0^1 \|K_x\|^2 \, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^2.$$

❧ D'après le préambule de la **Partie D**, pour tout $x \in I$,

$$\langle K_x \,|\, e_k \rangle = u_K(e_k)(x) = \lambda_k \cdot e_k(x)$$

(puisque e_k est un vecteur propre de u_K associé à la valeur propre λ_k). Comme la fonction e_k est continue sur le segment I, on en déduit que la fonction

$$\left[x \mapsto \langle e_k \,|\, K_x \rangle^2\right]$$

est intégrable sur I et, par linéarité,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \langle e_k \,|\, K_x \rangle^2 \, dx &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 \int_0^1 e_k^2(x) \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 \|e_k\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2.\end{aligned}$$

❧ Finalement,

$$\int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|^2 \, dx = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

en tant que reste d'une série convergente.

22. On a justifié à la question précédente que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$u_K(f)(x) = \langle K_x \,|\, f \rangle \quad \text{et} \quad \lambda_k e_k(x) = \langle K_x \,|\, e_k \rangle .$$

Par conséquent, l'expression

$$u_K(f)(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \,|\, f \rangle \cdot e_k(x)$$

est égale à

$$\begin{aligned} \Big\langle K_x \,\Big|\, f - \sum_{k=0}^{n} \langle e_k \,|\, f \rangle \cdot e_k \Big\rangle &= \big\langle K_x \,\big|\, f - p_n(f) \big\rangle \\ &= \big\langle K_x - p_n(K_x) \,\big|\, f \big\rangle \end{aligned}$$

puisque l'endomorphisme $I_E - p_n$ est auto-adjoint (en tant que projection orthogonale sur $F_n^{\perp}$).

❧ D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\Big| u_K(f)(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \,|\, f \rangle \cdot e_k(x) \Big|^2 \leqslant \big\| K_x - p_n(K_x) \big\|^2 \|f\|^2$$

pour tout $x \in I$.

❧ Ces expressions étant **[21.]** toutes deux des fonctions continues de $x \in [0,1]$, on peut intégrer cette inégalité et en déduire que

$$\Big\| u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \,|\, f \rangle \cdot e_k \Big\|^2$$

est majorée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\Big(\int_0^1 \big\| K_x - p_n(K_x) \big\|^2 \, dx \Big) \|f\|^2 .$$

On peut alors déduire de **[21.]** que

$$\lim_{n \to +\infty} \Big\| u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \,|\, f \rangle \cdot e_k \Big\|^2 = 0.$$

23. Nous allons prouver que la série de fonctions converge normalement sur I.

❧ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction e_k est bornée **[19.]** et, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\big| \lambda_k \langle e_k \,|\, f \rangle \cdot e_k(x) \big| \leqslant |\lambda_k| \cdot \big| \langle e_k \,|\, f \rangle \big| \cdot \|e_k\|_\infty .$$

On a trouvé une borne indépendante de x, il reste à vérifier que la série des bornes est convergente.

❧ D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \big| \langle e_k \,|\, f \rangle \big| \leqslant \|e_k\| \|f\| = \|f\|$$

puisque la fonction e_k est, par définition, un vecteur unitaire pour la norme euclidienne.

Par **[19.]**, $\|e_k\|_\infty = \sqrt{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$\lambda_k \underset{k \to +\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{k^2} \Big).$$

Donc

$$|\lambda_k| \cdot \big| \langle e_k \,|\, f \rangle \big| \cdot \|e_k\|_\infty \underset{k \to +\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{k^2} \Big)$$

et la série

$$\sum |\lambda_k| \cdot \big| \langle e_k \,|\, f \rangle \big| \cdot \|e_k\|_\infty$$

est convergente. On a ainsi démontré que la série de fonctions convergeait uniformément sur $[0,1]$.

❧ Comme l'intervalle I est un segment, la convergence uniforme sur I implique la convergence dominée et donc la convergence pour la norme euclidienne.

Par conséquent, la somme de cette série de fonctions pour la convergence uniforme est aussi la somme de cette série de fonctions pour la convergence en norme euclidienne.

Autrement dit,

$$\lim_{n \to +\infty} \Big\| u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \,|\, f \rangle \cdot e_k \Big\|_\infty = 0.$$

> *On rappelle qu'en dimension infinie, une même suite peut avoir deux limites différentes lorsqu'elle converge pour deux normes qui ne sont pas équivalentes.*
> *Le fait que, ici, la convergence uniforme implique la convergence en norme euclidienne, permet d'invoquer l'unicité de la limite.*

❧ Comme la convergence uniforme implique la convergence simple, on en déduit finalement que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad u_K(f)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \langle e_k \,|\, f \rangle \cdot e_k(x).$$

> *Si la convergence uniforme implique la convergence simple, en général, la convergence en norme euclidienne n'implique pas la convergence simple. On a donc établi ici un résultat qui n'est pas évident.*

24. On suit l'indication et on pose

$$\forall\, (x,y) \in I \times I, \quad K'(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x) e_k(y).$$

Il est clair que cette application K' est symétrique. D'autre part, les fonctions e_k sont continues et bornées sur I **[19.]**. Par conséquent, les fonctions

$$\begin{array}{rcccl} I \times I & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x & \longmapsto & e_k(x) \\ (x,y) & \longmapsto & y & \longmapsto & e_k(y) \end{array}$$

sont continues sur $I \times I$ et

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \ \forall\, (x,y) \in I \times I, \quad \big| \lambda_k e_k(x) e_k(y) \big| \leqslant 2\lambda_k .$$

On a trouvé un majorant indépendant de $(x,y) \in I \times I$ et la série $\sum 2\lambda_k$ est convergente **[19.]**, donc la fonction K' est continue sur $I \times I$ en tant que somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement.

Les conditions de la **Partie D** étant remplies, nous allons pouvoir appliquer le résultat établi en **[13.]**.

❧ Soient $f \in E$ et $x \in [0,1]$. En tant que fonction de y, la série
$$\sum \lambda_k e_k(x) e_k(y) f(y)$$
converge normalement sur le segment I car
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, y \in I, \quad \left|\lambda_k e_k(x) e_k(y) f(y)\right| \leqslant 2\|f\|_\infty\, \lambda_k$$
et la série $\sum \lambda_k$ est convergente. Par conséquent,
$$\int_0^1 K'(x,y) f(y)\, dy = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x) \int_0^1 e_k(y) f(y)\, dy$$
c'est-à-dire
$$u_{K'}(f)(x) = \langle K'_x \,|\, f \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \langle e_k \,|\, f \rangle \cdot e_k(x).$$
❧ Par **[23.]**,
$$u_K(f)(x) = \langle K_x \,|\, f \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \langle e_k \,|\, f \rangle \cdot e_k(x).$$
On a ainsi démontré que
$$\forall\, f \in E,\ \forall\, x \in [0,1], \quad u_K(f)(x) = u_{K'}(f)(x)$$
et donc **[13.]** que $K = K'$.

❧ Donc
$$\forall\, (x,y) \in [0,1] \times [0,1], \quad K(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x) e_k(y).$$

25. D'après la question précédente,
$$\forall\, x \in [0,1], \quad K(x,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k^2(x).$$
Or les fonctions e_k sont continues sur le segment $[0,1]$ et **[19.]**
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1], \quad 0 \leqslant \lambda_k e_k^2(x) \leqslant 2\lambda_k.$$
À nouveau, on a trouvé une borne indépendante de x et qui est le terme général d'une série convergente. Donc la série de fonctions $\sum \lambda_k e_k^2$ converge normalement sur le segment I.

La fonction $[x \mapsto K(x,x)]$ est donc intégrable sur I et
$$\int_0^1 K(x,x)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \int_0^1 e_k^2(x)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k$$
puisque $\|e_k\| = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ **[19.]**.