# Intégrales

*Justifier l'existence de*

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\,dt$$

*et étudier le comportement de* $I_n$ *lorsque* $n$ *tend vers* $+\infty$*.*

$\star$

On pose $I = ]0,+\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, t \in I, \quad f_n(t) = \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}.$$

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n$ est continue sur l'ouvert I.

Pour $n = 0$, la fonction $f_n$ tend vers 2 au voisinage de $t = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$f_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1+o(1)}{\sqrt{t}+o(\sqrt{t})} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Donc $f_n$ est intégrable au voisinage de $t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $f_n(t) \sim {}^2/\!\sqrt{t}$ au voisinage de $+\infty$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^n+o(t^n)}{t^{2n}+o(t^{2n})} \sim \frac{1}{t^n}.$$

Donc $f_n$ est intégrable au voisinage de $t = +\infty$ si, et seulement si, $n \geqslant 2$.

Bref : pour tout $n \geqslant 2$ (et seulement pour $n \geqslant 2$), la fonction $f_n$ est intégrable sur I.

❧ Considérons la fonction $f$ définie sur I par

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = \left|\begin{array}{ll} {}^1/\!\sqrt{t} & \text{si } 0 < t \leqslant 1, \\ 0 & \text{si } t > 1. \end{array}\right.$$

La fonction $f$ est continue sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Par ailleurs, elle admet une limite finie à gauche en $t = 1$ (limite égale à 1) et une limite finie à droite en $t = 1$ (limite nulle). Donc la fonction $f$ est bien continue par morceaux sur I.

❧ Pour $0 < t < 1$, on sait que $t^n$ et $t^{2n}$ tendent vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} = f(t).$$

Pour $t = 1$, on a $f_n(t) = 1 = f(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, pour $t > 1$, on sait que $t^n$ et $t^{2n}$ tendent vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, donc

$$f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{t^n}{t^{2n}} = \frac{1}{t^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = f(t).$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge donc simplement sur I vers la fonction $f$.

❧ Considérons la fonction $g$ définie sur I par

$$\forall\, t \in I, \quad g(t) = \left|\begin{array}{ll} {}^2/\!\sqrt{t} & \text{si } 0 < t \leqslant 1, \\ {}^1/t^2 & \text{si } t > 1. \end{array}\right.$$

Cette fonction est évidemment continue sur les deux intervalles ouverts $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Par ailleurs, elle tend vers une limite finie à gauche en $t = 1$ (limite égale à 2) et vers une limite finie à droite en $t = 1$ (limite égale à 1). La fonction $g$ est donc continue par morceaux sur I.

Par comparaison avec les fonctions de Riemann (au voisinage de $t = 0$ comme au voisinage de $t = +\infty$), la fonction $g$ est intégrable sur l'intervalle I.

❧ Pour $0 < t \leqslant 1$, il est clair que

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1+1}{\sqrt{t}+0} = g(t).$$

Pour $t > 1$ et $n \geqslant 2$, on a $0 < \sqrt{t} \leqslant t^n$ et donc

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1+t^n}{t^n+t^{2n}} = \frac{1}{t^n} \leqslant \frac{1}{t^2} = g(t).$$

On a donc établi que

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \forall\, t \in I, \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant g(t)$$

où le majorant est indépendant de $n$ et intégrable sur I en tant que fonction de $t$.

La convergence est donc dominée. Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2.$$