Intégrales

Pour tout entier $n \geqslant 1$, *on définit la fonction* f_n *sur* $[0,1]$ *en posant :*

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f_n(t) = \left| \begin{array}{ll} n\sqrt{n}\, t & \textit{pour } 0 \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 1/\sqrt{t} & \textit{pour } 1/n \leqslant t \leqslant 1. \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge simplement sur* $[0,1]$, *mais ne converge pas uniformément sur* $[0,1]$.

Calculer de deux manières différentes la limite de

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$$

lorsque n *tend vers* $+\infty$.

$\star$

❧ Les deux définitions de $f_n(1/n)$ coïncident :

$$n\sqrt{n}\,\frac{1}{n} = \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{1/n}}$$

donc la fonction f_n est bien définie sur $[0,1]$.

❧ La fonction f_n est clairement continue sur $[0, 1/n[$, ainsi que sur $]1/n, 1]$. De plus, elle est clairement continue à gauche en $x = 1/n$ et continue à droite en $x = 1/n$, donc elle est bien continue en $x = 1/n$. Par conséquent, la fonction f_n est continue sur le segment $[0,1]$.

L'intégrale I_n existe donc bien en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Remarque.— La fonction f_n est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur les intervalles $[0, 1/n[$ et $]1/n, 1]$. Elle est également dérivable à gauche et à droite en $x = 1/n$, mais

$$(f_n)'_g(1/n) = n\sqrt{n} \quad \text{tandis que} \quad (f_n)'_d(1/n) = \left.\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\right|_{x=1/n} = \frac{-n\sqrt{n}}{2},$$

donc f_n n'est pas dérivable en $x = 1/n$.

❧ Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Si $0 < x \leqslant 1$, alors il existe un entier $n_0 = n_0(x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad x \geqslant \frac{1}{n_0} \geqslant \frac{1}{n}$$

et donc

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1/\sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leqslant 1. \end{array} \right.$$

Remarque.— La fonction f est continue sur $]0,1]$, mais elle n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$, car elle n'a pas de limite à droite finie au voisinage de 0 (elle tend vers $+\infty$).

❧ Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$, si la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ convergeait uniformément sur $[0,1]$, la limite f de cette suite serait également continue sur $[0,1]$, ce qui est faux comme on vient de le constater.

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

❧ On peut calculer explicitement I_n : pour tout $n \geqslant 1$,

$$I_n = n\sqrt{n}\,\frac{(1/n)^2}{2} + 2\big(\sqrt{1} - \sqrt{1/n}\big) = 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

❧ Sinon, on peut remarquer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\forall\, 0 < x \leqslant \frac{1}{n}, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(1/n) = \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$$

et que

$$\forall\, \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant f_n(x) = f(x).$$

Par conséquent,

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x).$$

Or la fonction f est une fonction intégrable de référence sur $]0,1]$, donc la convergence est dominée !

Par conséquent,

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt = 2\big[\sqrt{1} - \sqrt{0}\big] = 2.$$

REMARQUE.— La fonction f n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ et *a fortiori* n'est pas intégrable sur $[0,1]$. Cependant, elle est bien continue sur $]0,1]$ et intégrable sur $]0,1]$: c'est même, comme on l'a dit, une fonction de référence !

Cette remarque en passant pour indiquer que la théorie de l'intégration qui est au programme est trop simplifiée pour ne pas présenter quelques bizarreries...