15
Matrices

I
Opérations algébriques sur une matrice

1. Pour une matrice A quelconque, calculer $\lambda.A$, $A+\lambda I$, $\lambda.A+I$.

2. Que dire du produit de deux matrices triangulaires inférieures ? (resp. supérieures ?)

3. **Trace**

3.1 Quelles que soient les matrices A et B,

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Cette formule est vraie dès que les deux produits AB et BA sont définis — même si les deux matrices ne sont pas carrées.

3.2 Si A et B sont deux matrices carrées de même taille,

$$\mathrm{tr}(A^\top.B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}.$$

4. Quelles que soient les matrices carrées A et B,

$$(AB)^\top = B^\top.A^\top$$

Si A et B sont symétriques, le produit AB n'est pas nécessairement symétrique.

5. Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe deux matrices $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$M = S + A.$$

Cette décomposition est unique et

$$S = \frac{M+M^\top}{2}, \qquad A = \frac{M-M^\top}{2}.$$

6. On suppose que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible.

6.1 Si A est symétrique, alors A^{-1} est symétrique.

6.2 Si A est triangulaire supérieure, alors A^{-1} est triangulaire supérieure.

7. **Calculs d'inverse**

7.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

7.2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

7.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

II
Matrice d'une famille de vecteurs

8. Le rang d'une famille libre est égal à son cardinal.

9. **Théorème de la base incomplète**

En combinant les deux théorèmes suivants, on peut définir une base de proche en proche.

9.1 → **Augmentation d'une famille libre**

Soit $(e_1,\dots,e_r)$, une famille libre. Alors la famille augmentée

$$(e_1,\dots,e_r,e_{r+1})$$

est libre si, et seulement si,

$$e_{r+1} \notin \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_r).$$

9.2 → **Diminution d'une famille génératrice**

Soit $(e_1,\dots,e_r,e_{r+1})$, une famille génératrice du sous-espace F. Alors la famille diminuée

$$(e_1,\dots,e_r)$$

est génératrice de F si, et seulement si,

$$e_{r+1} \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_r).$$

Dans ce cas,

$$\mathrm{rg}(e_1,\dots,e_r,e_{r+1}) = \mathrm{rg}(e_1,\dots,e_r).$$

10. On pose

$$\varepsilon_1 = (1,-1,2), \quad \varepsilon_2 = (2,2,1), \quad \varepsilon_3 = (3,0,5).$$

10.1 La famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

10.2 Construire des familles libres/génératrices de $\mathbb{R}^3$ à l'aide des vecteurs suivants.

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_1+\varepsilon_2 &= (4,0,5) & -\varepsilon_2+\varepsilon_3 &= (1,-2,4) \\ -2\varepsilon_1+\varepsilon_3 &= (1,2,1) & \varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3 &= (2,-3,6) \\ 2\varepsilon_2-\varepsilon_3 &= (1,4,-3) & 3\varepsilon_2-2\varepsilon_3 &= (0,6,-7) \\ 3\varepsilon_1-\varepsilon_2 &= (1,-5,5) & 2\varepsilon_1+3\varepsilon_2 &= (8,4,7) \\ -\varepsilon_1+\varepsilon_3 &= (2,1,3) & 2\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3 &= (3,-4,7) \end{aligned}$$

10.3 Variante : Calculer le rang d'une famille construite à l'aide des vecteurs précédents.

III
Colonnes d'une matrice

11. **Méthode**

11.1 → *Pour toute matrice colonne X, le produit AX est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.*

11.2 On peut donc déterminer des vecteurs du noyau de A en trouvant des relations de liaison entre les colonnes de A.

12.1 S'il existe une matrice colonne $X_0 \neq 0$ telle que $AX_0 = 0$, que dire de la matrice A ?

12.2 Si $AX = 0$ pour toute matrice colonne X, que dire de la matrice A ?

13. Pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

on a $C_1 + 2C_2 - C_3 = 0$.

14. Pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

on a $2C_1 - C_2 - C_3 = 0$.

15. Pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -5 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

on a $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$.

IV

Puissances d'une matrice

16. Les matrices suivantes sont nilpotentes d'indice 2.

16.1

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

16.2

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

16.3

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

17. Les matrices suivantes sont nilpotentes d'indice 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, pour tout $n \geqslant 1$,

$$(A+I)^n = I + nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2,$$
$$(-I+A)^n = (-1)^n\Big[I - nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2\Big].$$

18. Pour toute matrice colonne U, la matrice

$$P = \frac{U.U^\top}{U^\top.U}$$

est la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}\cdot U$ et la matrice $Q = I - P$ est la projection orthogonale sur le plan $U^\perp$.

18.1 Avec

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

on pose

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors $B = U.U^\top$, $\lambda = U^\top.U = 6$ et $A = \lambda I - B$, donc

$$A^2 = \lambda A, \quad B^2 = \lambda B \qquad \text{et} \qquad AB = BA = 0.$$

18.2 Idem avec $U^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Ce qui revient à permuter les vecteurs de base.)

18.3 Idem avec $U^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 3 \\ -1 & 10 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

mais cette fois $\lambda = U^\top.U = 11$.

19. Formule du binôme

Calculer les puissances de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. Calculs par blocs

20.1 Calculer les puissances des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

20.2 Calculer les puissances des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

V

Polynômes annulateurs

21.1 Que dire des puissances d'une matrice triangulaire ?

21.2 Que dire des polynômes annulateurs d'une matrice triangulaire ? (CN)

22. Le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est $(X-1)(X+1)(X-2) = X^3 - 2X^2 - X + 2$. L'inverse de A est donc

$$\frac{1}{2}\cdot(I + 2A - A^2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est $(X-1)^2(X-3) = X^3 - 5X^2 + 7X - 3$. L'inverse de A est donc

$$\frac{1}{3}\cdot(7I - 5A + A^2) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

24. Le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$, donc A est son propre inverse.

VI

Rang d'une matrice

25. Matrices de rang 1
Donner un vecteur directeur de leur image et retrouver une équation cartésienne de leur noyau.

25.1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -5 & -15 & -5 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Ker} A = [x + 3y + z = 0]$$

25.2

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Ker} A = [-3x - 4y + 2z = 0]$$

25.3

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -4 \\ -9 & 3 & -3 \\ -9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Ker} A = [3x - y + z = 0]$$

25.4

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 10 \\ -2 & -6 & 10 \\ -4 & -12 & 20 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Ker} A = [x + 3y - 5z = 0]$$

25.5

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Ker} A = [2x - z = 0]$$

25.6

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 6 & -8 & 2 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Ker} A = [3x - 4y + z = 0]$$

26. Matrices de rang 2
Donner une base de leur image; retrouver une équation cartésienne de leur image et un vecteur directeur de leur noyau.

26.1 *Suite de* **[13]** – $\operatorname{Im} A = [x - 5y - 3z = 0]$
26.2 *Suite de* **[14]** – $\operatorname{Im} A = [4x - 7y + z = 0]$
26.3 *Suite de* **[15]** – $\operatorname{Im} A = [3x + 5y + 7z = 0]$
26.4

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} A = [5x - 7y + 3z = 0] \qquad \operatorname{Ker} A = \mathbb{R} \cdot (0, 0, 1)$$

26.5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ -6 & 15 & 4 \\ 10 & -11 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} A = [7x - 5y - 3z = 0] \qquad \operatorname{Ker} A = \mathbb{R} \cdot (1, 2, -6)$$

26.6

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 7 & -1 \\ 8 & -1 & -5 \\ 4 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} A = [-x + 3y - 2z = 0] \qquad \operatorname{Ker} A = \mathbb{R} \cdot (1, -2, 2)$$

26.7

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 8 & 8 & 10 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} A = [-4x + y + 5z = 0] \qquad \operatorname{Ker} A = \mathbb{R} \cdot (-11, 6, 4)$$

26.8

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 2 & -12 & -16 \\ 3 & -12 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} A = [3x + 3y - 2z = 0] \qquad \operatorname{Ker} A = \mathbb{R} \cdot (-4, -2, 1)$$

26.9

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 5 & 5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} A = [-y + z = 0] \qquad \operatorname{Ker} A = \mathbb{R} \cdot (5, 4, 8)$$

27. Démontrer, avec le moins de calculs possibles, que les matrices suivantes sont inversibles.

27.1

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 3 \\ 20 & -5 & -19 \\ -4 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$

27.2

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 12 \\ -12 & 5 & -2 \\ 9 & -11 & -3 \end{pmatrix}$$

27.3

$$\begin{pmatrix} -11 & -4 & -3 \\ -2 & 7 & 6 \\ -1 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

27.4

$$\begin{pmatrix} 2 & -8 & -3 \\ -1 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

27.5

$$\begin{pmatrix} -14 & 3 & -11 \\ -6 & 3 & 3 \\ -2 & -5 & -21 \end{pmatrix}$$

27.6

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 4 & 16 & -20 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

27.7

$$\begin{pmatrix} -20 & -17 & -1 \\ 8 & 12 & -12 \\ 10 & 15 & -3 \end{pmatrix}$$

27.8

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 22 \\ 5 & -8 & 5 \\ -6 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

VII

Changement de base

28. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

29. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

29.1 On suppose qu'il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Que vaut α ? En déduire que l'hypothèse est absurde.

29.2 Démontrer qu'il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$$

mais qu'il n'existe pas de matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}.$$

30. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.

30.1 La droite $\operatorname{Ker}(f - I_3)$ et le plan $\operatorname{Ker}(f + I_3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

30.2 En choisissant un vecteur directeur u_1 de $\operatorname{Ker}(f - I_3)$ et une base (u_2, u_3) de $\operatorname{Ker}(f + I_3)$, on obtient une base

$$\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$$

de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

31. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$.

31.1 Le sous-espace $\operatorname{Ker}(f - 2I)$ est un plan : donner une base (u_1, u_2) de ce plan.

31.2 On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3 = (1, 1, 1)$. Démontrer que

$$\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Expliciter α et β.)

32. Dans chacun des exemples suivants, la matrice P est inversible.

32.1 On considère

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

4.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

32.2 On considère

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

5.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 13 & -5 \\ -1 & -5 & 13 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

6.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 1 & 14 & -4 \\ 1 & -4 & 14 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

32.3 On considère

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

8.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} -4 & 8 & -8 \\ 8 & 3 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

9.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

VIII

Calculs par blocs

33. Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_1B_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $A^3 = 0$.

34. La matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si, les blocs diagonaux A et C sont inversibles. Dans ce cas,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

35. Produit de Kronecker
Soit B, une matrice inversible.
35.1 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$C = \begin{pmatrix} B & 2B \\ 2B & 3B \end{pmatrix}$$

est donc inversible et

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -3B^{-1} & 2B^{-1} \\ 2B^{-1} & -B^{-1} \end{pmatrix}.$$

35.2 Variantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$