Séries numériques

1. Vocabulaire
Savoir distinguer le terme général, la série, les sommes partielles, la somme, les restes.

2. Séries de référence
Condition nécessaire et suffisante de convergence pour les :
2.1 séries de Riemann,
2.2 séries géométriques,
2.3 séries de Poisson.

3. Nature de $\sum j^n$?

4. Exemple de série divergente qui n'est pas grossièrement divergente ?

I
Théorèmes de comparaison

5. Rôle du signe
Peut-on appliquer un théorème de comparaison à une série dont le terme général
1. est négatif ?
2. change de signe indéfiniment (par ex. une série alternée) ?
3. est complexe ?

6. La série $\sum e^{-\sqrt{n}}$ est convergente car $e^{-\sqrt{n}} = o(n^{-p})$ pour tout $p \geqslant 2$.
La règle de D'Alembert ne permet pas de démontrer que cette série converge.

7. Piège
Les séries
$$\sum \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n+1}$$
sont de même nature car leur différence est absolument convergente.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \binom{2n}{n}$. La série $\sum \frac{1}{u_n}$ est absolument convergente.

9. Nature des séries suivantes, en discutant sur le paramètre $x \in \mathbb{R}_+$.
$$\sum \ell\text{n}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\, x^n \qquad \sum \frac{x^n}{n(1+x^n)}$$
$$\sum \frac{1}{n+n^2x} \qquad \sum_{(n\geqslant 2)} \frac{e^{-nx}}{n^2-1}$$
$$\sum \frac{\cos 2\pi n! x}{n^{3/2}}$$

10. On considère la série $\sum a_n x^n$ avec $x \in \mathbb{R}_+$ et
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

10.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a
$$a_n x^n \underset{n\to+\infty}{=} o(x^n),$$
donc la série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour $0 \leqslant x < 1$.

10.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n \geqslant \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^n + t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(n+1)},$$
donc la série $\sum a_n x^n$ diverge pour tout $x \geqslant 1$. En particulier, elle diverge grossièrement pour $x > 1$.

11. On considère la somme
$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ell\text{n}\, n}.$$

11.1 L'expression $S(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

11.2 La série de terme général
$$M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \frac{xe^{-nx}}{\ell\text{n}\, n} = \frac{1}{en\,\ell\text{n}\, n}$$
est divergente.

11.3 Pour tout $A > 0$, il existe une constante $M > 0$ telle que
$$\forall\, x \in [0, A], \qquad \Big|\sum_{k=n}^{+\infty} xe^{-kx}\Big| \leqslant M.$$
Par conséquent,
$$\forall\, x \in [0, A], \qquad \Big|\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ell\text{n}\, k}\Big| \leqslant \frac{M}{\ell\text{n}\, n}.$$

12. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$, deux séries de terme général strictement positif. On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente et que
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$$
à partir d'un certain rang. Alors la série $\sum v_n$ est convergente.

II
Séries alternées

13. Nature de la série de terme général
$$u_n = \ell\text{n}\Big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\Big) = \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

14. Les séries
$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$
sont-elles de même nature ?

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^3} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$
Démontrer que la série $\sum R_n$ est absolument convergente.

16. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la série
$$\sum \frac{(-1)^n n}{n^2+x}$$
est convergente, mais pas absolument convergente.

17. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose
$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \Big(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\Big).$$
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

18. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}_+$ la série

$$\sum (-1)^n \frac{x^n}{1-x^n}$$

est-elle convergente ?

19. Nature de la série de terme général

$$u_n = \sin\left(\pi\sqrt{(-1)^n + n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(n\pi + \frac{(-1)^n\pi}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).$$

20. La série de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

est convergente mais pas absolument convergente.

21. La série

$$\sum \frac{(-1)^n x}{n^2+x^2}$$

converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k x}{k^2+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n}.$$

22. Soient a et b, deux réels strictement positifs. En discutant sur les valeurs de a et b, déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \ell\mathrm{n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right) + \frac{1}{2n^b}.$$

III

Comparaison avec une intégrale

23. Illustrer la comparaison d'une somme et d'une intégrale par une figure correctement légendée (cas croissant / cas décroissant).

24. Peut-on comparer une somme et une intégrale dans le cas où la fonction f n'est pas positive ?

25. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}.$$

Donc la série $\sum S_n$ est divergente.

26. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2} \sim \frac{1}{n}.$$

Donc la série $\sum S_n$ est divergente.

27. Par comparaison d'une somme et d'une intégrale,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Peut-on en déduire une série dont la somme est $\pi/4$?

28. La série $\sum \frac{\ell\mathrm{n}\, n}{n}$ est divergente. Ordre de grandeur des sommes partielles ?

29. **Série de Bertrand**
La série $\sum \frac{1}{n\,\ell\mathrm{n}\, n}$ est divergente. Ordre de grandeur des sommes partielles ?

30. La fonction

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$$

est définie sur $\mathbb{R}$. Elle tend vers 0 au voisinage de 0 et vers $\pi/2$ au voisinage de $+\infty$.

IV

Calculs de sommes

31. En admettant que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

démontrer que

$$\sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24} \quad \text{et que} \quad \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

32. Soit $x \in \mathbb{R}$.

32.1 Calculer la somme partielle

$$\sum_{n=0}^{N} e^{inx}.$$

32.2 Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Calculer la somme partielle

$$\sum_{n=0}^{N} \cos(nx+\varphi).$$

32.3 Ces sommes partielles convergent-elles ?

33. **Séries géométriques**
Soit $q \in \mathbb{C}$, différent de 1. Calculer les sommes suivantes (lorsqu'elles sont définies).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$$

$$\sum_{n=N_0+1}^{+\infty} q^n = \frac{q^{N_0+1}}{1-q}$$

$$\sum_{n \text{ pair}} q^n = \frac{1}{1-q^2}$$

$$\sum_{n \text{ impair}} q^n = \frac{q}{1-q^2}$$

$$\sum_{n\equiv 1 \pmod 3} q^n = \frac{q}{1-q^3}$$

$$\sum_{n=N_0}^{N_1} q^n = q^{N_0} \cdot \frac{1-q^{N_1-N_0+1}}{1-q}$$

34. La série de terme général

$$u_n = \ell\mathrm{n}\, n - 2\,\ell\mathrm{n}(n+1) + \ell\mathrm{n}(n+2)$$

est absolument convergente et sa somme est égale à $-\ell\mathrm{n}\, 2$. Équivalent du reste ?

Questions, exercices & problèmes

35. **Développement décimal**
Soit $x \in \mathbb{R}$.

35.1 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$d_n = \frac{\lfloor 10^n.x \rfloor}{10^n}.$$

La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers x.
35.2 Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\lfloor 10 d_{n+1} \rfloor = d_n.$$

35.3 Il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 1}$ d'entiers tels que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \varepsilon_k \in [\![0,9]\!]$$

et telle que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{10^k}.$$

36. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad D_n = H_n - \ell\text{n}\, n.$$

Comme

$$D_{n+1} - D_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

la suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
37. En comparant la somme à une intégrale (généralisée),

$$\int_0^1 \ell\text{n}\, t \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ell\text{n}\, \frac{k}{n}.$$

On en déduit que

$$\ell\text{n}\, n! \underset{n\to+\infty}{=} n\,\ell\text{n}\, n + \mathcal{O}(n).$$

Comparer avec la formule de Stirling :

$$n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n.$$