RMS 134 [1470]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2.$$

1❧ *Étudier la continuité de* f.

2❧ *Démontrer que* f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant x.$$

Tracer le graphe de f.

3❧ *On considère un réel* a *et la suite* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *définie par la donnée de* $x_0 = a$ *et la relation de récurrence*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad x_{k+1} = f(x_k).$$

Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

1❧ La fonction $[x \mapsto \lfloor x \rfloor]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, donc la fonction f est en particulier continue en chaque point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

❧ Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $f(n) = n + (n-n)^2 = n$: chaque entier est un point fixe de f.

Lorsque x tend vers n **par valeurs supérieures**, alors $\lfloor x \rfloor$ tend vers n et $x - \lfloor x \rfloor$ tend vers 0, donc $f(x)$ tend vers n.

Lorsque x tend vers n **par valeurs inférieures**, alors $\lfloor x \rfloor$ tend vers $(n-1)$ et $x - \lfloor x \rfloor$ tend vers $n - (n-1) = 1$, donc $f(x)$ tend vers

$$(n-1) + 1^2 = n.$$

La fonction f est donc continue en chaque point $n \in \mathbb{Z}$.

❧ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2❧ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1 \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant (x - \lfloor x \rfloor)^2 \leqslant x - \lfloor x \rfloor$$

et par conséquent

$$f(x) \leqslant \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor) = x.$$

✍ *Plus précisément, si $x \notin \mathbb{Z}$, alors $0 < x - \lfloor x \rfloor < 1$. Donc $(x - \lfloor x \rfloor)^2 < (x - \lfloor x \rfloor)$ et $f(x) < x$. Les entiers sont donc les seuls points fixes de f.*

❧ Considérons un entier $n \in \mathbb{Z}$ et deux réels $n \leqslant x < y < n+1$. On a donc $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor = n$ et

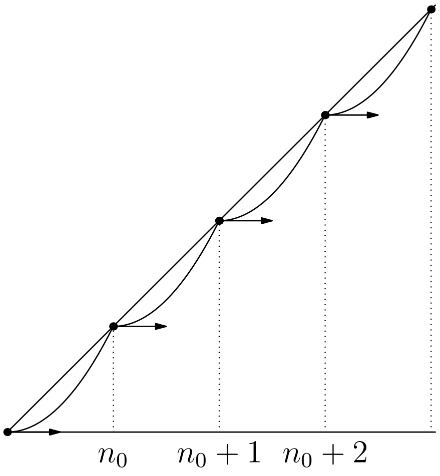
$$0 \leqslant x - n < y - n < 1.$$

Par conséquent,

$$f(n) = n \leqslant n + (x-n)^2 = f(x) < n + (y-n)^2 = f(y) < n + 1 = f(n+1).$$

La fonction f est donc strictement croissante sur chaque segment $[n, n+1]$.

Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



3❧ Comme $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = f(x_k) \leqslant x_k.$$

❧ Posons $n = \lfloor a \rfloor$. On a donc $n \leqslant x_0 < n+1$.

Comme f est strictement croissante et que chaque entier est un point fixe de f, on en déduit (par récurrence) que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad n \leqslant x_k < n+1.$$

❧ La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad n \leqslant x_{k+1} \leqslant x_k \leqslant x_0 < n+1.$$

Par conséquent, elle converge vers un réel $\ell \in [n, x_0]$. Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, la limite ℓ est un point fixe de f qui appartient au segment $[n, x_0] \subset [n, n+1[$.

Comme les entiers sont les seuls points fixes de f, on en déduit que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $n = \lfloor x_0 \rfloor$.