RMS 134 [1398]

> *Soient* E*, un espace vectoriel et* u*, un endomorphisme nilpotent de* E*.*
> *On considère un vecteur* $x \in \mathrm{E}$ *et on suppose que l'entier naturel* k *est choisi de telle sorte que*
> $$u^k(x) \neq 0_\mathrm{E}.$$
> *Alors la famille*
> $$\mathscr{F} = \big(x, u(x), \dots, u^k(x)\big)$$
> *est libre.*

❧ **Réduction du problème.**
Comme u^k est linéaire et que $u^k(x) \neq 0_\mathrm{E}$, il est clair que $x \neq 0_\mathrm{E}$.
L'ensemble
$$I_x = \big\{\ell \in \mathbb{N} \;:\; u^\ell(x) \neq 0_\mathrm{E}\big\}$$
est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (elle contient $k = 0$ puisque $x \neq 0_\mathrm{E}$!). Cette partie est majorée par l'indice de nilpotence d de u : comme u^d est l'endomorphisme nul, le vecteur $u^d(x)$ est nul et
$$\forall\, \ell \geqslant d, \quad u^\ell(x) = u^{\ell-d}\big(u^d(x)\big) = u^{\ell-d}(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$$
donc $\ell \notin I_x$ pour tout $\ell \geqslant d$.

✍ *Ce raisonnement n'est donc possible que pour* $\ell \geqslant d$*.*
En effet, comme l'endomorphisme u *est nilpotent, il n'est pas inversible et l'endomorphisme* u^m *est défini si, et seulement si, l'entier* m *est un entier naturel.*

D'après l'Axiome de bon ordre, l'ensemble I_x admet un plus grand élément ℓ_0 tel que
$$u^{\ell_0}(x) \neq 0_\mathrm{E} \quad \text{et} \quad u^{\ell_0+1}(x) = 0_\mathrm{E}.$$

❧ Si on démontre que la famille
$$\mathscr{F}_0 = \big(x, u(x), \dots, u^k(x), \dots, u^{\ell_0}(x)\big)$$
est libre, alors la famille $\mathscr{F}$ sera libre en tant que sous-famille de la famille libre $\mathscr{F}_0$.
Il suffit donc de démontrer que la famille $\mathscr{F}_0$ est libre.

❧ **Démonstration dans le cas particulier** $k = \ell_0$
Pour les raisons qu'on vient d'exposer, on suppose ici que $u^k(x) \neq 0_\mathrm{E}$ et que $u^{k+1}(x) = 0_\mathrm{E}$.

✍ *On peut raisonner "de proche en proche" (ce qui est une peu rigoureuse façon de raisonner par récurrence) ou, plus rapidement, par l'absurde en invoquant à nouveau l'Axiome de bon ordre.*

Si la famille $\mathscr{F}$ est liée, alors il existe une famille de scalaires
$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$$
telle que
$$\sum_{\ell=0}^{k} \alpha_\ell \cdot u^\ell(x) = 0_\mathrm{E}.$$
Comme
$$\{0 \leqslant \ell \leqslant k \;:\; \alpha_\ell \neq 0\}$$
est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet un plus petit élément k_0 (Axiome de bon ordre). Ainsi,
$$\begin{aligned} 0_\mathrm{E} &= \sum_{\ell=0}^{k} \alpha_\ell u^\ell(x) \\ &= \sum_{0 \leqslant \ell < k_0} \underbrace{\alpha_\ell}_{=0} u^\ell(x) + \sum_{\ell=k_0}^{k} \alpha_\ell u^\ell(x) \\ &= \underbrace{\alpha_{k_0}}_{\neq 0} u^{k_0}(x) + \sum_{k_0 < \ell \leqslant k} \alpha_\ell u^\ell(x). \end{aligned}$$

Comme $k_0 \leqslant k$, alors $k - k_0 \in \mathbb{N}$, donc l'endomorphisme u^{k-k_0} est bien défini et, par linéarité,

$$\begin{aligned} 0_E = u^{k-k_0}(0_E) &= \alpha_{k_0} u^{k-k_0}\big(u^{k_0}(x)\big) + \sum_{k_0 < \ell \leqslant k} \alpha_\ell u^{\ell+k-k_0}(x) \\ &= \alpha_{k_0} u^k(x) + \sum_{k_0 < \ell \leqslant k} \alpha_\ell \cdot 0_E \end{aligned}$$

car $\ell + k - k_0 = k + (\ell - k_0) \geqslant k + 1$ pour tout entier $\ell > k_0$.

✍ *C'est <u>ici</u> qu'il est important d'avoir supposé que $u^{k+1}(x) = 0_E$.*

On obtient ainsi $\alpha_{k_0} u^k(x) = 0_E$ alors que le scalaire α_{k_0} n'est pas nul (par définition de l'indice k_0) et que le vecteur $u^k(x)$ n'est pas nul (par hypothèse de l'énoncé) : c'est absurde !

❧ On a ainsi démontré que la famille

$$\big(x, u(x), \dots, u^k(x)\big)$$

était libre, quel que soit l'entier $k \in I_x$.