17
Déterminants

I

Formes multilinéaires

1. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une base $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
1.1 Il existe un isomorphisme entre les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^n$:

$$T(\varphi) = \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

1.2 La forme bilinéaire φ est symétrique (resp. alternée) si, et seulement si, la matrice $T(\varphi)$ est symétrique (resp. antisymétrique).

2. Étudier l'ensemble des formes bilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^3$ (sous-espace de dimension 3, engendré par les trois mineurs).

3. Soient $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 2$ et $u \in L(E)$. L'application

$$\varphi_u = \left[(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathrm{can}}(x_1, \dots, u(x_k), \dots, x_n)\right]$$

est une forme n-linéaire alternée sur E et

$$\varphi_u(x_1, \dots, x_n) = (\operatorname{tr} u) \cdot \det_{\mathrm{can}}(x_1, \dots, x_n)$$

pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère une matrice

$$A_n = \big(a_n(i,j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant d} \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$$

et on suppose que, quels que soient $1 \leqslant i, j \leqslant d$,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(i,j) = 0.$$

Alors la suite de terme général $u_n = \det A_n$ tend vers 0.

II

Groupe symétrique

5. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Ou bien le support de σ est vide, ou bien le cardinal du support est supérieur à 2.

III

Comatrice

6. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
6.1 Si A est inversible, alors la comatrice de A est inversible.
6.2 Si A n'est pas inversible, alors l'image de la comatrice est contenue dans le noyau de $A^\top$:

$$A^\top.\mathrm{Com}(A) = 0_n$$

donc le rang de la comatrice est inférieur à 1.
6.3 Le rang de la comatrice de A est égal à 1 si, et seulement si, le rang de A est égal à $(n-1)$.

7. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice inversible.
7.1 On veut calculer A^{-1} par les formules de Cramer (= en calculant la comatrice). Quel est le coût de cette opération ?
7.2 Et si on calcule A^{-1} par l'algorithme du pivot ?

8. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$. Alors le déterminant de A est égal à ± 1 si, et seulement si, la matrice A est inversible et les coefficients de la matrice inverse A^{-1} sont des entiers relatifs.

9. Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ avec $n < p$.
9.1 Les déterminants de AB et de BA sont bien définis.
9.2 Le déterminant de BA est nul.
9.3 Avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a $\det AB = 1$.

10. On suppose que les fonctions $[x \mapsto a_{i,j}(x)]$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I.
10.1 La fonction

$$f = [x \mapsto \det A(x)]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall\, x \in I, \quad f'(x) = \sum_{j=1}^{n} \det\big(C_1(x), \dots, C_j'(x), \dots, C_n(x)\big).$$

10.2 On suppose que, pour tout $x \in I$, la matrice $A(x)$ est inversible et, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on définit la fonction $b_{i,j}$ en posant

$$\forall\, x \in I, \quad [A(x)]^{-1} = \big(b_{i,j}(x)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Alors les fonctions $b_{i,j}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

IV

Calculs de déterminants

IV.1 En petite dimension

11. Calculer les déterminants des matrices suivantes.
11.1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}_0 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_0 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_6 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_1$$

11.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_6 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_4 \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{-4}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}_0 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_0 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_6$$

11.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}_3 \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}_0$$

1.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}_6 \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}_{-18} \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}_0$$

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}_{-2} \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 0\end{pmatrix}_{-\frac{1}{2}} \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix}_0$$

12. Équation cartésienne d'un hyperplan
Si le rang d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$ est égal à 2, alors son image est l'hyperplan de $\mathbb{K}^3$ engendré par les colonnes de la matrice : on en déduit facilement une base de $\operatorname{Im} A$.

12.1 Si deux vecteurs u et v sont linéairement indépendants, alors un vecteur w appartient au sous-espace $\operatorname{Vect}(u, v)$ si, et seulement si, la famille (u, v, w) est liée.

12.2 Si (u, v) est une base du plan $P \subset \mathbb{K}^3$, alors une équation cartésienne de P est donnée par

$$\begin{vmatrix}u_1 & v_1 & x\\ u_2 & v_2 & y\\ u_3 & v_3 & z\end{vmatrix} = 0.$$

12.3 La même méthode peut s'appliquer en toute dimension $n \geqslant 2$ (pour les droites affines du plan, aussi bien que pour les hyperplans en dimension 4).

12.4 Équations de droite en dimension 2

1. La droite
$$(6,\ 7) + \mathbb{R} \cdot (2,\ 7)$$
admet $-7\,x + 2\,y + 28 = 0$ pour équation.

2. La droite
$$(-9,\ 7) + \mathbb{R} \cdot (5,\ 0)$$
admet $5\,y - 35 = 0$ pour équation.

3. La droite
$$(6,\ 7) + \mathbb{R} \cdot (2,\ 4)$$
admet $-4\,x + 2\,y + 10 = 0$ pour équation.

4. La droite
$$(0,\ 6) + \mathbb{R} \cdot (-2,\ 4)$$
admet $-4\,x - 2\,y + 12 = 0$ pour équation.

5. La droite
$$(4,\ -3) + \mathbb{R} \cdot (5,\ -1)$$
admet $x + 5\,y + 11 = 0$ pour équation.

12.5 Équations de plan en dimension 3

6. Le plan engendré par les vecteurs
$$\boldsymbol{u} = (-2,\ 3,\ -1) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v} = (6,\ 6,\ -5)$$
admet $-9\,x - 16\,y - 30\,z = 0$ pour équation.

7. Le plan engendré par les vecteurs
$$\boldsymbol{u} = (3,\ -1,\ -3) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v} = (-5,\ -6,\ 1)$$
admet $-19\,x + 12\,y - 23\,z = 0$ pour équation.

8. Le plan engendré par les vecteurs
$$\boldsymbol{u} = (2,\ 1,\ -2) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v} = (2,\ -2,\ 4)$$
admet $-12\,y - 6\,z = 0$ pour équation.

9. Le plan engendré par les vecteurs
$$\boldsymbol{u} = (-2,\ 0,\ 1) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v} = (2,\ -2,\ -5)$$
admet $2\,x - 8\,y + 4\,z = 0$ pour équation.

13. Soit $a \in \mathbb{C}$. Le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix}a^2 & a & 2 & 2a\\ a & a^2 & 2a & 2\\ 2 & 2a & a^2 & a\\ 2a & 2 & a & a^2\end{pmatrix}$$

est égal à $(a-1)^2(a+1)^2(a-2)^2(a+2)^2$.
Opérations :

— $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$, $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$ et factorisation ;
— $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_4$ et factorisation ;
— $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ et factorisation ;
— $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$, $C_4 \leftarrow C_4 + C_1$ et factorisation.

On obtient une matrice triangulaire par blocs.

IV.2 Matrices de taille n

14. Soient $a_1, \dots, a_n$, des nombres réels (avec $n \geqslant 3$). Le déterminant de la matrice

$$A = \big(\sin(a_i + a_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

est nul.

15.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & x & -1\\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & x\end{vmatrix} = x^{n-2}[x^2 - (n-1)].$$

15.2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & x & -1\\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & x\end{vmatrix} = x^{n-2}[x^2 + n - 1].$$

16. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, des nombres complexes.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1\\ b_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1\\ \vdots & b_2 & a_2 & \cdots & a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & b_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1}\\ b_1 & b_2 & \cdots\ b_{n-1} & b_n & a_n\end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$$

17. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1\\ \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

17.1 En effectuant $C_1 \leftarrow C_1 - (C_2 + \cdots + C_n)$, on obtient une matrice triangulaire et $\Delta_n = 2 - n$.

17.2 En développant par la dernière colonne, puis par la première ligne du mineur $m_{1,n}$, on obtient la relation de récurrence

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \Delta_{n+1} = \Delta_n - 1.$$

18. Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n!$$

en effectuant $C_k \leftarrow C_k - C_n$ pour tout $1 \leqslant k < n$.

19.1 Pour tout entier n impair, le déterminant de la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

est nul.

19.2 Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\det A_{n+1} = -\det A_n + 1$$

et par suite

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \det A_{2p} = 1, \quad \det A_{2p+1} = 0.$$

Opérations :
- $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour $2 \leqslant k \leqslant n$;
- développement par la dernière colonne ;
- dans le second terme, ajout de la première colonne aux autres colonnes et développement par la dernière ligne.

19.3 Pour tout entier $n \geqslant 2$, le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & -2 & 0 & 4 & & & \\ & \vdots & -3 & 0 & \ddots & & \\ & & \vdots & -4 & \ddots & n-1 & \\ & & & \vdots & \ddots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

est égal à $(n!).\det A_n$.

20. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose

$$D_n = \begin{vmatrix} p+q & p & \cdots & p \\ q & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p \\ q & \cdots & q & p+q \end{vmatrix}.$$

Par linéarité par rapport à la première colonne, on montre que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad D_{n+1} = p.D_n + q^{n+1}$$

et donc que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad D_n = \sum_{k=0}^{n} p^k q^{n-k} = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$$

pour $p \neq q$ et $D_n = (n+1)p^n$ si $q = p$.

21. Soit $a \in \mathbb{C}$.

21.1 Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et tout entier $n \geqslant 2$,

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & x \end{vmatrix} = (x-a)^n + na(x-a)^{n-1}.$$

Opérations : $C_k \leftarrow C_k - C_1$ pour $2 \leqslant k \leqslant n$ et factorisation ; puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ et on obtient une matrice triangulaire.

21.2 Quels que soient $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{C}$, on pose

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & x_{n-1} & a \\ a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}.$$

L'astuce taupinale $x_n = (x_n - a) + a$ nous permet d'exploiter la linéarité par rapport à la dernière colonne et d'obtenir la relation suivante.

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad D_n = (x_n - a)D_{n-1} + a(x_1 - a)\cdots(x_{n-1} - a).$$

On en déduit que

$$D_n = \prod_{k=1}^{n}(x_k - a) + a\sum_{k=1}^{n}\Big[\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}}(x_j - a)\Big]$$

pour tout $n \geqslant 2$.

22. Soient $r_1, \ldots, r_n$ des nombres réels.

22.1 Le déterminant

$$F(a,b,x) = \begin{vmatrix} r_1 + x & a + x & \cdots & a + x \\ b + x & r_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \cdots & b + x & r_n + x \end{vmatrix}$$

est une fonction affine de x.

22.2 Si a et b sont distincts, alors

$$\begin{vmatrix} r_1 & a & \cdots & a \\ b & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & r_n \end{vmatrix} = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$$

où $f(x) = (r_1 - x)(r_2 - x) \cdots (r_n - x)$.

22.3 Et si $a = b$?

23. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Alors, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - a^{n-2}(n-1)^2 = a^n - a^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2.$$

24. Quels que soient $a_0, \ldots, a_{n-1}, x \in \mathbb{C}$,

$$\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix} = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k.$$

25. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \qquad P_n(z) = \det(A_n - zI_n)$$

où

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on pose $P_1(z) = -z$.

25.1 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P_2(z) = z^2 - 1$.

25.2

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, z \in \mathbb{C}, \quad P_{n+2}(z) = -zP_{n+1}(z) - P_n(z).$$