RMS 134 [1459]

> *Soit* E*, un espace vectoriel normé de dimension finie. On considère une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que, pour tout* $x \in \mathsf{E}$*, la suite de terme général* $\|x - u_n\|$ *converge.*
>
> **1❧** *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a une valeur d'adhérence.*
>
> **2❧** *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

1❧ Pour $x = 0_{\mathsf{E}}$, la suite $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc elle est bornée. D'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie possède une valeur d'adhérence. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a donc une valeur d'adhérence.

2❧ Il existe donc une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathsf{E}$. Avec $x = \ell$, on sait que la suite de terme général $\|u_n - \ell\|$ converge. Comme la suite extraite de terme général $\|u_{\varphi(n)} - \ell\|$ tend vers 0, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\| = 0$$

et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.