RMS 134 [1385]

> *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme unitaire de degré 3 admettant trois racines distinctes, notées z_1, z_2 et z_3. On note M_k, l'image de la racine z_k pour $1 \leqslant k \leqslant 3$.*
> *La polynôme dérivé P' admet une racine double si, et seulement si, le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.*

❧ Par hypothèse,

$$P = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$$

et donc

$$P' = 3X^2 - 2(z_1 + z_2 + z_3)X + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1).$$

Le discriminant réduit de P' est égal à

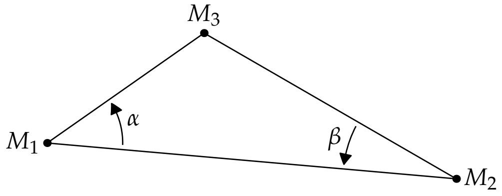
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_2)$$

donc P' admet une racine double si, et seulement si,

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_2).$$

❧ Si le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral, alors les trois côtés ont même longueur :

$$\frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|} = \frac{M_1M_3}{M_1M_2} = 1 = \frac{M_2M_1}{M_2M_3} = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_3 - z_2|}$$



et les angles orientés

$$\alpha = (\mathbf{M_1M_2}, \mathbf{M_1M_3}) = \operatorname{Arg} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1},$$
$$\beta = (\mathbf{M_2M_3}, \mathbf{M_2M_1}) = \operatorname{Arg} \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$$

sont égaux. Par conséquent, il faut que

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}.$$

Réciproquement, si

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2},$$

alors les angles orientés α et β sont égaux, donc le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle en M_3 et par conséquent $M_1M_3 = M_2M_3$. En égalant aussi les modules, on obtient aussi que

$$M_1M_3 \times M_2M_3 = M_1M_2^2$$

d'où finalement : $M_1M_3 = M_2M_3 = M_1M_2$ et le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

Le triangle $M_1M_2M_3$ est donc équilatéral si, et seulement si,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}.$$

❧ Comme les complexes z_1, z_2 et z_3 sont distincts, l'égalité précédente équivaut à

$$(z_3 - z_1)(z_3 - z_2) = -(z_2 - z_1)^2$$

c'est-à-dire à

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = 0$$

(il suffit de développer).