Normes [39.2]

Soient f et g, deux applications k-lipschitziennes de Ω dans F. Pour tout $t \in [0,1]$, on pose

$$h_t = (1-t)f + tg \;:\; \Omega \to F.$$

Quels que soient x et y dans Ω,

$$\begin{aligned}\big\|h_t(x) - h_t(y)\big\| &= \big\|(1-t)[f(x)-f(y)] + t[g(x)-g(y)]\big\| \\ &\leqslant |1-t|\big\|f(x)-f(y)\big\| + |t|\big\|g(x)-g(y)\big\|\end{aligned}$$

par inégalité triangulaire et homogénéité de la norme $\|\cdot\|$.

Comme $t \in [0,1]$, les deux poids t et $(1-t)$ sont positifs et donc, par hypothèse de Lipschitz,

$$\begin{aligned}\big\|h_t(x) - h_t(y)\big\| &\leqslant (1-t)\big\|f(x)-f(y)\big\| + t\big\|g(x)-g(y)\big\| \\ &\leqslant (1-t)k\|x-y\| + tk\|x-y\| = k\|x-y\|.\end{aligned}$$

Cela démontre que l'ensemble $\mathscr{L}_k(\Omega, F)$ des applications k-lipschitziennes est convexe (= stable par combinaison convexe).

Remarque.— Il est plus délicat de prouver rigoureusement que cet ensemble *n'est pas* un espace vectoriel (en général). Nous allons procéder par l'absurde.

Supposons que l'ensemble $\mathscr{L}_k(\Omega, F)$ possède la structure d'espace vectoriel et considérons f, un vecteur de cet espace. Alors $\lambda \cdot f \in \mathscr{L}_k(\Omega, F)$ pour tout scalaire $\lambda > 0$. Ainsi, quels que soient x et y dans Ω,

$$\forall\, \lambda > 0, \quad \big\|(\lambda\cdot f)(x) - (\lambda\cdot f)(y)\big\| \leqslant k\|x-y\|.$$

Par homogénéité de la norme, on en déduit que

$$\forall\, x, y \in \Omega,\ \forall\, \lambda > 0, \quad \big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant \frac{k}{\lambda}\,\|x-y\|.$$

Le minorant ne dépend pas de λ, on passe donc à l'inf pour $\lambda > 0$ (ce qui revient à faire tendre λ vers $+\infty$) :

$$\forall\, x, y \in \Omega, \quad 0 \leqslant \big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant 0.$$

Autrement dit, la fonction f est constante !

Bref : si l'ensemble $\mathscr{L}_k(\Omega, F)$ ne contient pas que des fonctions constantes, alors ce n'est pas un espace vectoriel.