Planche I

Certains énoncés sont trop longs pour être traités au cours de la préparation. J'attends que vous lisiez soigneusement la totalité de l'énoncé et que vous sachiez précisément quels théorèmes ou quelles méthodes il convient d'appliquer.

Exercice I.1 — 1563

1. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1.1 Quelle est la dimension de E ? Donner une base de E.

1.2 On considère l'ensemble H défini par

$$P \in H \iff P(1) = 0.$$

❧ Démontrer que H est un sous-espace de E.

❧ Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de H.

❧ Déterminer un sous-espace G de E tel que

$$E = G \oplus H.$$

1.3 Étant donnés deux polynômes

$$A = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3,$$
$$B = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3,$$

on pose

$$\langle\, A \mid B \,\rangle = \sum_{k=0}^{3} a_k b_k.$$

❧ Démontrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E.

❧ Soit $P = c_2 X^2 + c_1 X + c_0$. Exprimer les coordonnées de $(X-1)P$ relatives à la base canonique de E.

❧ Indiquer une méthode permettant de trouver une base orthogonale de H.

❧ Vérifier que la famille

$$\mathscr{B}_H = (X-1,\ 2X^2 - X - 1,\ 3X^3 - X^2 - X - 1)$$

est une base orthogonale de H pour ce produit scalaire. Cette base est-elle orthonormée ?

Exercice I.2 — 1681

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n g(x)\,\mathrm{d}x$$

où

$$\forall\, x \in [0,1], \quad g(x) = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

2.1 Justifier l'existence des intégrales I_n.

2.2 Démontrer qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \big|g(x)\big| \leqslant K.$$

❧ En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

2.3 Démontrer qu'il existe une fonction G de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que

$$(n+1)I_n = \frac{e}{2} - \int_0^1 x^{n+1} G(x)\,\mathrm{d}x.$$

❧ En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ La série $\sum I_n$ est-elle convergente ?

Planche II

Certains énoncés sont trop longs pour être traités au cours de la préparation. J'attends que vous lisiez soigneusement la totalité de l'énoncé et que vous sachiez précisément quels théorèmes ou quelles méthodes il convient d'appliquer.

Exercice II.1 — 1555

3. On considère l'endomorphisme $u \in L(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1 Calculer les matrices

$$A - 2I_3, \quad (A - 2I_3)^2 \quad \text{et} \quad (A + I_3).$$

3.2 En déduire que le sous-espace

$$F = \operatorname{Ker}(u + \mathrm{I}_E)$$

est une droite vectorielle. Donner un vecteur directeur de cette droite.

3.3 En déduire également que le sous-espace

$$G = \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{I}_E)^2$$

est un plan vectoriel. Donner une équation cartésienne de ce plan.

3.4 Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3.5 Déterminer un réel α tel que

$$p = \alpha \cdot (u - 2\,\mathrm{I}_E)^2$$

soit un projecteur. Identifier l'image et le noyau de ce projecteur.

Exercice II.2 — 1674

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} \cdot u_n.$$

On pose également

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

4.1 Démontrer que u_n est un réel strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.2 Soit $a > 0$. Démontrer que

$$\ell\mathrm{n}\Big(1 + \frac{a}{n+1}\Big) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

4.3 Démontrer que

$$\ell\mathrm{n}\, v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

4.4 Quelle est la nature de la série $\sum \ell\mathrm{n}\, v_n$?

4.5 En déduire qu'il existe un réel K tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \ell\mathrm{n}(n^{3/2} u_n) = K.$$

4.6 Que dire de la série $\sum u_n$?

Planche III

Certains énoncés sont trop longs pour être traités au cours de la préparation. J'attends que vous lisiez soigneusement la totalité de l'énoncé et que vous sachiez précisément quels théorèmes ou quelles méthodes il convient d'appliquer.

Exercice III.1 — 1556

5. Soit E, un espace vectoriel de dimension finie. On considère deux endomorphismes f et g de E tels que

$$f^2 = g^2 = \mathrm{I}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = -g \circ f.$$

5.1 Démontrer que

$$E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{I}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{I}_E).$$

5.2 Vérifier que

$$\forall\, x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{I}_E), \quad g(x) \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{I}_E).$$

❧ Démontrer que l'application linéaire

$$g_1 \,:\, \mathrm{Ker}(f - \mathrm{I}_E) \to \mathrm{Ker}(f + \mathrm{I}_E)$$

définie par

$$\forall\, x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{I}_E), \quad g_1(x) = g(x)$$

est injective.

❧ Comparer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{I}_E)$ et de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{I}_E)$.

5.3 Démontrer que la dimension de E est paire.

Exercice III.2 — 1692

6. On considère la fonction G définie par

$$\forall\, x > 0, \quad G(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

NB : On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

6.1 Démontrer (en citant précisément le théorème appliqué) que la fonction G est bien définie sur $]0, +\infty[$, qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et qu'elle est strictement croissante.

6.2 Démontrer que G est concave.

6.3 Démontrer que

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad 0 \leqslant G(x) \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant 1.$$

6.4 Démontrer que

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad G(x) \leqslant e^{-x} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

6.5 Tracer l'allure du graphe de la fonction G.

7. On considère l'équation différentielle suivante.

$$(E) \qquad \forall\, x > 0, \quad xy''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$$

7.1 Vérifier que l'équation différentielle (E) admet une solution de la forme $y(x) = x^\alpha$.

7.2 Soient y et z, deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$, liées par la relation suivante.

$$\forall\, x > 0, \qquad y(x) = xz(x)$$

Démontrer que y est une solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle (E') qu'on précisera.

❧ Indiquer comment résoudre l'équation (E').

Planche IV

Certains énoncés sont trop longs pour être traités au cours de la préparation. J'attends que vous lisiez soigneusement la totalité de l'énoncé et que vous sachiez précisément quels théorèmes ou quelles méthodes il convient d'appliquer.

Exercice IV.1 — 1679

8. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction h_n en posant

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad h_n(t) = \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}.$$

8.1 Démontrer avec soin que chaque fonction h_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.

8.2 Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

❧ Déterminer la limite de $h_n(t)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$. (Discuter sur la valeur de t.)

❧ La suite $\big(h_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ? (Si oui, on précisera son sens de variation.)

8.3 Trouver une fonction g, continue sur $\mathbb{R}_+$, telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad \big|h_n(t)\big| \leqslant g(t).$$

❧ On note G, une primitive de g. Est-il possible de choisir la fonction g de telle sorte que G admette une limite finie au voisinage de $+\infty$?

Exercice IV.2 — 1393

9. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.1 Écrire les matrices $A - I_3$ et $A - 2I_3$. En déduire que le produit

$$A(A-I_3)(A-2I_3)$$

est égal à la matrice nulle et que

$$A^3 = 3A^2 - 2A.$$

9.2 Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A.$$

9.3 On pose maintenant

$$P_1 = 2A - A^2 \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A.$$

Vérifier que

$$AP_1 = P_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = 2P_2$$

et en déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = P_1 + 2^n P_2.$$

Planche V

Certains énoncés sont trop longs pour être traités au cours de la préparation. J'attends que vous lisiez soigneusement la totalité de l'énoncé et que vous sachiez précisément quels théorèmes ou quelles méthodes il convient d'appliquer.

Exercice V.1 — 1678

10. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^n \frac{\operatorname{Arctan} t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$$

10.1 Dessiner l'allure du graphe de la fonction Arctan. On précisera les propriétés remarquables de ce graphe.

10.2 Dans un premier temps, on ne demande pas de calculer u_n.

❧ Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

❧ Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et croissante.

❧ Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

10.3 En calculant la valeur de u_n, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice V.2 — 1611

11. On considère le polynôme

$$P = X^3 - (2+i)X^2 + 3X + i - 2.$$

11.1 Démontrer sans aucun calcul que le polynôme P est scindé sur $\mathbb{C}$.

11.2 Vérifier que le polynôme P admet une unique racine réelle λ.

11.3 Vérifier que le polynôme P admet une unique racine imaginaire pure $i\alpha$.

11.4 Donner l'expression factorisée de P.

Exercice V.3 — 1548

12. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

12.1 Calculer le rang de u. En déduire une base de $\operatorname{Ker} u$.

12.2 On considère les vecteurs

$$\varepsilon_1 = (1,0,0,0,1) \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = (0,1,1,1,0).$$

Vérifier que $\mathscr{B}_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\operatorname{Im} u$.

❧ Calculer $u(\varepsilon_1)$ et $u(\varepsilon_2)$. En déduire qu'il existe un endomorphisme $u_0 \in \mathrm{L}(\operatorname{Im} u)$ défini par

$$\forall\, x \in \operatorname{Im} u, \qquad u_0(x) = u(x)$$

et vérifier que la matrice de u_0 relative à la base $\mathscr{B}_0$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

❧ L'endomorphisme u_0 est-il injectif ? En déduire que

$$\mathbb{R}^5 = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u.$$

Planche VI

Certains énoncés sont trop longs pour être traités au cours de la préparation. J'attends que vous lisiez soigneusement la totalité de l'énoncé et que vous sachiez précisément quels théorèmes ou quelles méthodes il convient d'appliquer.

Exercice VI.1 — 1389

13. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

13.1 Quel est le rang de A ? Donner une base de l'image de A.

13.2 Calculer le déterminant suivant.

$$\varphi(x,y,z,t) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ 3 & 2 & 1 & t \end{vmatrix}$$

La colonne B appartient-elle à l'image de A ?

Exercice VI.2 — 1634

14. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice non nulle. Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\varphi(M) = (\operatorname{tr} M) \cdot A - M.$$

14.1 Démontrer que φ est linéaire.

14.2 On suppose que $M \in \operatorname{Ker} \varphi$.

❧ Démontrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda A$.

❧ Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que l'application φ soit injective.

14.3 Vérifier que

$$(\varphi \circ \varphi)(M) = (\operatorname{tr} A - 2) \cdot \varphi(M) + (1 - \operatorname{tr} A) \cdot M$$

pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Comment cette relation permet-elle de retrouver le résultat de la question précédente ?

Exercice VI.3 — 1675

15. Pour $0 < x \leqslant 1$, on pose

$$G(x) = \int_x^1 \frac{\ell n\, u}{1+u}\, du.$$

15.1 Démontrer que la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$, en précisant l'expression de sa dérivée.

15.2 Démontrer que la fonction G est strictement croissante et négative sur $]0,1]$.

15.3 Démontrer que

$$\forall\, 0 < u \leqslant 1, \quad \ell n\, u \leqslant \frac{\ell n\, u}{1+u} \leqslant 0.$$

En déduire que

$$\forall\, 0 < x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant -x\, \ell n\, x + x - 1 \leqslant G(x) \leqslant 0$$

puis que la fonction G tend vers une limite finie au voisinage de 0.

16. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\, dt.$$

16.1 Démontrer que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et bornée.

16.2 Vérifier que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u}\, du.$$

16.3 Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \forall\, 0 < u \leqslant 1, \quad 1 + \frac{\ell n\, u}{n} \leqslant u^{1/n} \leqslant 1$$

et en déduire que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \ell n\, 2 + \frac{-1}{n} \leqslant \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u}\, du \leqslant \ell n\, 2.$$

16.4 Que dire de la série $\sum a_n$?

Planche VII

Certains énoncés sont trop longs pour être traités au cours de la préparation. J'attends que vous lisiez soigneusement la totalité de l'énoncé et que vous sachiez précisément quels théorèmes ou quelles méthodes il convient d'appliquer.

Exercice VII.1 1672

17. On considère une fonction $f_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, qu'on suppose continue. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

17.1 Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

17.2 On suppose *dans cette question seulement* que la fonction f_0 est positive sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que f_2 est croissante et convexe.

17.3 On se restreint à l'intervalle $[-1, 1]$.

❧ Démontrer qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$\forall\, x \in [-1, 1], \quad \big|f_0(x)\big| \leqslant K.$$

❧ En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [-1, 1], \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant K\frac{|x|^n}{n!}.$$

❧ Étudier la nature de la série $\sum f_n(x)$ en fonction de $x \in [-1, 1]$.

Exercice VII.2

18. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme scindé à racines simples. Ses racines sont notées

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$.

18.1 Quel est le degré de P ?

❧ Que dire du coefficient dominant du polynôme dérivé P' ?

18.2 Citer précisément le Théorème de Rolle.

❧ En déduire que le polynôme dérivé P' est également scindé à racines simples.

18.3 Démontrer que les polynômes P et P' sont premiers entre eux.

18.4 En tant qu'éléments de $\mathbb{R}[X]$, les polynômes

$$P_1 = (X-1)(X^2+1) \quad \text{et} \quad P_2 = (X+1)(X^2+1)$$

ont-ils une racine commune ? Sont-ils premiers entre eux ?

Planche VIII

Certains énoncés sont trop longs pour être traités au cours de la préparation. J'attends que vous lisiez soigneusement la totalité de l'énoncé et que vous sachiez précisément quels théorèmes ou quelles méthodes il convient d'appliquer.

Exercice VIII.1 — 1553

19. On étudie les racines du polynôme

$$P_0 = 3X^3 - X^2 - X - 1.$$

19.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $|x| > 1$. Démontrer que $P_0(x) \neq 0$.

19.2 Démontrer que le polynôme dérivé P_0' admet deux racines réelles distinctes, de signes opposés. (**NB :** On ne demande pas de calculer ces racines.)

19.3 On note α, la racine négative de P_0'.

- Vérifier que $9\alpha^2 = 2\alpha + 1$.
- En déduire que

$$P_0(\alpha) = \frac{-1}{3}\alpha^2 - \frac{2}{3}\alpha - 1 < 0.$$

19.4 Tracer l'allure du graphe de la fonction $[t \mapsto P_0(t)]$. En déduire que P_0 admet exactement une racine réelle x_0 et deux racines complexes x_1 et x_2. Démontrer que $x_1 x_2 > 0$.

Exercice VIII.2 — 1657

20. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad u_n = \ell\mathrm{n}(1 + a_n).$$

20.1 Calculer un développement asymptotique de u_n à $o(1/n^2)$ près lorsque n tend vers $+\infty$.

20.2 En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

20.3 Calculer la limite de

$$p_n = \prod_{k=2}^{n}(1 + a_k)$$

lorsque n tend vers $+\infty$. (On commencera par vérifier que tous les facteurs sont strictement positifs.)

Planche IX

Certains énoncés sont trop longs pour être traités au cours de la préparation. J'attends que vous lisiez soigneusement la totalité de l'énoncé et que vous sachiez précisément quels théorèmes ou quelles méthodes il convient d'appliquer.

Exercice IX.1 — 1604

21. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

21.1 Écrire les matrices $M - 6I_3$, $M - 3I_3$ et $M - 2I_3$. Déterminer une base du noyau de chacune de ces matrices.

21.2 Démontrer sans aucun calcul que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible. Calculer ensuite son inverse, puis le produit

$$P^{-1}MP.$$

21.3 Démontrer qu'il existe trois matrices A, B et C (indépendantes du paramètre n) telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad M^n = 6^n A + 3^n B + 2^n C.$$

NB : on ne demande pas de calculer explicitement les matrices A, B et C.

Exercice IX.2 — 1650

22. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \left]{-\pi}/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi\right[.$$

22.1 Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, réel $x_n \in I_n$ tel que

$$\tan x_n = x_n.$$

22.2 Démontrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$.

22.3 On pose maintenant

$$y_n = x_n - n\pi.$$

❧ Démontrer que $y_n = \operatorname{Arctan} x_n$ et que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\pi/2$.

❧ En déduire que

$$\tan\big(y_n - \pi/2\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n - \frac{\pi}{2}.$$

❧ Justifier que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \tan\big(y_n - \pi/2\big) = \frac{1}{\tan(x_n - n\pi)}$$

et en déduire que

$$y_n - \frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}.$$

Planche X

Certains énoncés sont trop longs pour être traités au cours de la préparation. J'attends que vous lisiez soigneusement la totalité de l'énoncé et que vous sachiez précisément quels théorèmes ou quelles méthodes il convient d'appliquer.

Exercice X.1 — 1626

23. On considère l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est notée (e_1, e_2, e_3).

23.1 Démontrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

est inversible. (On ne demande pas de calculer son inverse.)

23.2 Calculer A^2 et A^3. En déduire que la famille

$$\big(e_1,\ f(e_1),\ f^2(e_1)\big)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

23.3 On suppose connue la décomposition du vecteur $f^3(e_1)$ dans cette base :

$$f^3(e_1) = \sum_{k=0}^{2} \alpha_k \cdot f^k(e_1).$$

Démontrer que

$$\forall\, x \in E, \quad f^3(x) = \sum_{k=0}^{2} \alpha_k \cdot f^k(x).$$

En déduire que

$$A^3 + A^2 + A + I_3 = 0_3.$$

23.4 On considère un vecteur $x \in E$, *non nul*.
Justifier l'existence de trois réels u_0, u_1 et u_2 tels que

$$(u_0, u_1, u_2) \neq (0,0,0) \quad \text{et} \quad x = \sum_{k=0}^{2} u_k \cdot f^k(e_1).$$

On suppose que $f(x) = \lambda x$ pour un certain scalaire λ.
Démontrer que

$$u_1 = -\lambda(1+\lambda)u_0 \quad \text{et} \quad u_2 = -\lambda u_0.$$

En déduire que $u_0 \neq 0$.

Exercice X.2 — 1663

24. Soient $a < b$, deux réels et f, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On considère le polynôme

$$P = \frac{(X-a)(X-b)}{2}.$$

24.1 Calculer l'intégrale

$$\int_a^b \big|P(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

(**NB :** On pourra, par exemple, effectuer le changement de variable $t = a + (b-a)u$.)

24.2 Démontrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [a,b], \quad \big|f''(t)\big| \leqslant M.$$

24.3 On suppose dans cette question que

$$f(a) = f(b) = 0.$$

❧ En intégrant par parties, exprimer l'intégrale

$$\int_a^b f''(t)P(t)\,\mathrm{d}t$$

en fonction de l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

❧ En déduire que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}M.$$

24.4 On ne suppose plus que $f(a) = f(b) = 0$. Démontrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-a)\big[f(a)+f(b)\big]}{2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}M.$$

Planche XI

Certains énoncés sont trop longs pour être traités au cours de la préparation. J'attends que vous lisiez soigneusement la totalité de l'énoncé et que vous sachiez précisément quels théorèmes ou quelles méthodes il convient d'appliquer.

Exercice XI.1 — 1613

25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un entier non nul. On considère le polynôme

$$P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n.$$

25.1 Démontrer qu'il existe un entier $r \geqslant 1$, des nombres complexes $a_1, \dots, a_r$, des entiers naturels non nuls $m_1, \dots, m_r$ ainsi qu'un nombre a_0 tels que

$$P_n = a_0 \prod_{k=1}^{r} (X - a_k)^{m_k}.$$

❧ Que vaut a_0 ?
❧ Démontrer que

$$\prod_{k=1}^{r} a_k^{m_k} = (-1)^{n-1}.$$

❧ En déduire que, si l'entier n est pair, alors il existe un entier $1 \leqslant k \leqslant r$ tel que le nombre complexe a_k soit un réel strictement négatif et l'entier m_k soit impair.
25.2 Appliquer la formule de Taylor au polynôme P_n au point 1.
❧ En déduire que $(X-1)^3$ divise P_n.
❧ Calculer le reste de la division euclidienne de P_n par $(X-1)^4$.

Exercice XI.2 — 1658

26. Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\lim_{x \to +\infty} xf'(x) = 1.$$

26.1 Démontrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall\, x \geqslant a, \quad f'(x) \geqslant \frac{1}{2x}.$$

26.2 En déduire qu'il existe deux nombres $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall\, x \geqslant a, \quad f(x) \geqslant A + B\,\ell\mathrm{n}\, x$$

puis que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Planche XII

Certains énoncés sont trop longs pour être traités au cours de la préparation. J'attends que vous lisiez soigneusement la totalité de l'énoncé et que vous sachiez précisément quels théorèmes ou quelles méthodes il convient d'appliquer.

Exercice XII.1 — 1550

27. On considère l'endomorphisme u de $E = \mathbb{R}^5$ représenté dans la base canonique de E par la matrice T suivante.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

27.1 Déterminer le rang de u et une base

$$\mathscr{B}_0 = (\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$$

de $\operatorname{Ker} u$.

27.2 Démontrer que le couple

$$\mathscr{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \big((1,0,0,0,0),\ (1,1,1,1,1)\big)$$

est une base de $\operatorname{Im} u$.

27.3 Vérifier que la famille

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$$

est une base de E. Déterminer la matrice de u relative à cette base.

27.4 Démontrer que

$$\mathbb{R}^5 = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u.$$

27.5 On pose

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que P est inversible et calculer $P^{-1}UP$.

Exercice XII.2 — 1677

28. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{nx + x\sqrt{x}}.$$

28.1 On suppose que l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

❧ Donner un équivalent de $f_n(x)$ au voisinage de $x = 0$.

❧ Déterminer un réel α tel que

$$f_n(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^\alpha}\Big).$$

28.2 On suppose que le réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.

❧ Déterminer, si elle existe, la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ Peut-on trouver une fonction continue et bornée g telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x > 0, \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant g(x) \quad ?$$

❧ Peut-on trouver une fonction g, continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et de limite nulle au voisinage de $+\infty$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x > 0, \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant g(x) \quad ?$$

❧ Peut-on trouver une fonction g, bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et de limite nulle au voisinage de $+\infty$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x > 0, \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant g(x) \quad ?$$