1
Pourquoi on ne peut pas prolonger une dérivée

On considère une fonction

$$f : E \to F$$

définie sur une partie $\mathscr{D}_f$ de E.

Q 1. *Dans quelles circonstances peut-on prolonger une fonction ?*

R 1. On peut prolonger une fonction $f : E \to F$ seulement si elle n'est pas déjà définie sur E tout entier, c'est-à-dire :

$$\mathscr{D}_f \subsetneq E.$$

Q 2. *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \ell n\, x.$$

Peut-on prolonger la fonction f ?

R 2. Oui, on peut prolonger f car elle n'est définie que sur $]0, +\infty[$ et pas sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Q 3. *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{\sin x}{x} & \textit{pour } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \textit{pour } x = 0. \end{array} \right.$$

Peut-on prolonger la fonction f ?

R 3. Non, on ne peut pas prolonger la fonction f, car elle est déjà définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
La fonction f est elle-même un prolongement de la fonction $\left[x \mapsto \frac{\sin x}{x}\right]$ qui n'est naturellement définie que sur $\mathbb{R}^*$.

Q 4. *Comment peut-on prolonger une fonction ?*

R 4. Une application $g : E \to F$ prolonge f si, et seulement si :

1. on a $g(x) = f(x)$ lorsque la valeur $f(x)$ est déjà définie, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathscr{D}_f$;
2. la valeur de $g(x)$ est arbitrairement choisie dans F lorsque la valeur $f(x)$ n'est pas définie, c'est-à-dire pour tout $x \notin \mathscr{D}_f$.

Autrement dit : on n'a pas le choix sur $\mathscr{D}_f$; on a tous les droits hors de $\mathscr{D}_f$.

Q 5. *Quel est l'intérêt d'un prolongement ?*

R 5. Prolonger la fonction f, c'est transformer la fonction $f : E \longrightarrow F$ qui n'est définie que sur $\mathscr{D}_f$ en une application $g : E \longrightarrow F$ définie sur E tout entier.

Le prolongement g n'est plus intéressant que la fonction f que s'il possède une propriété que ne possède pas la fonction f.

Q 6. *Combien de prolongements de* $f : E \longrightarrow F$ *peut-on définir ?*

R 6. Zéro, un ou plusieurs...

❧ Si $\mathscr{D}_f = E$, on ne peut définir *aucun* prolongement de f !

❧ Si $\mathscr{D}_f \subsetneq E$, on peut virtuellement définir une *infinité* de prolongements de f en définissant $g(x)$ arbitrairement pour $x \notin \mathscr{D}_f$.

Q 7. *Certains prolongements de* f *sont-ils plus intéressants que d'autres ?*

R 7. Oui. Si la fonction f possède une propriété importante sur $\mathscr{D}_f$, il est intéressant de chercher un prolongement qui possède la même propriété sur E tout entier.

❧ Si f n'est définie que sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}^*$, il est très intéressant de savoir s'il existe un prolongement de f défini et continu sur $\mathbb{R}$ tout entier (**prolongement par continuité**).

❧ Si f n'est définie que sur $\mathbb{R}^*$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, il est très intéressant de savoir s'il existe un prolongement de f défini et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (**prolongement** $\mathscr{C}^1$).

Q 8. *La fonction* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *admet-elle des prolongements ?*

R 8. Oui et non !

❧ Considérée comme une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc elle ne peut pas être prolongée.

❧ Mais on peut aussi considérer $\exp$ comme une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et dans ce cas, elle admet des prolongements, comme par exemple :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad g_0(z) = \left| \begin{array}{ll} e^z & \text{si } \mathfrak{Im}(z) = 0, \\ 0 & \text{si } \mathfrak{Im}(z) \neq 0. \end{array} \right.$$

Parmi tous les prolongements possibles, l'un d'eux est particulièrement intéressant (**prolongement analytique**) :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad g_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Ce prolongement sert à définir l'exponentielle complexe.

Q 9. *Comment définir un prolongement par continuité ?*
R 9. Si f est définie sur $\mathscr{D}_f =]a, b]$ seulement et si f admet une limite finie ℓ au point a, alors l'application g définie sur $E = [a, b]$ tout entier par

$$\forall\, x \in [a, b], \quad g(x) = \left|\begin{array}{ll} f(x) & \text{si } a < x \leqslant b, \\ \ell & \text{si } x = a \end{array}\right.$$

est un prolongement de f et cette application g est, par construction, continue au point a :

$$g(a) = \ell = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x).$$

Q 10. *Quelles sont les fonctions qui admettent un prolongement par continuité ?*
R 10. Pour que f admette un prolongement par continuité en x_0, il faut que f ne soit pas déjà définie en x_0 mais que f tende vers une limite finie au voisinage de 0.
❧ Si f est définie sur $]a, b[$ et admet un prolongement g qui est continu sur $[a, b]$, alors

$$g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) \quad \text{et} \quad g(b) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} g(x)$$

(par continuité de g aux points a et b) et donc

$$g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{et} \quad g(b) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$$

(car g est un prolongement de f).

Q 11. *Combien de prolongements par continuité peut-on définir pour f ?*
R 11. Aucun, un seul ou une infinité, ça dépend !
❧ Si f est déjà définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, on ne peut pas la prolonger !
Exemple : la fonction exp.
❧ Si f n'est définie que sur $\mathbb{R}^*$ et ne tend pas vers une limite finie au voisinage de 0, on peut la prolonger en une application g définie sur $\mathbb{R}$, mais cette application ne sera pas continue en 0 (quelle que soit la valeur choisie pour $g(0)$).
Exemple : la fonction $[x \mapsto 1/x]$.
❧ Si f n'est définie que sur $\mathbb{R}^*$ et tend vers une limite finie ℓ au voisinage de 0, il existe un unique prolongement g continu sur $\mathbb{R}$.
Exemple : la fonction $\left[x \mapsto \frac{\sin x}{x}\right]$, prolongée par $g(0) = 1$.
❧ Si f n'est définie que sur $]0, +\infty[$ et tend vers une limite finie ℓ au voisinage de 0, il existe un unique prolongement g_0 continu sur $[0, +\infty[$, mais il existe une infinité de prolongements continus sur $\mathbb{R}$.
Exemple : la fonction $\left[x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]$, prolongée par

$$\forall\, x \leqslant 0, \quad g_a(x) = 1 + ax$$

où a est un paramètre réel quelconque.

Q 12. *Quelles propriétés doit nécessairement posséder la fonction f pour qu'elle admette un prolongement $\mathscr{C}^1$ au point x_0 ?*
R 12. On suppose pour simplifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$.
Pour que f admette un prolongement g de classe $\mathscr{C}^1$ au point x_0, il faut

1. que la fonction f ne soit pas déjà définie au point x_0 ;
2. que le prolongement g soit continu au point x_0 ;
3. que le prolongement g soit dérivable au point x_0 ;
4. que la dérivée g' du prolongement soit continue au point x_0.

❧ En particulier, il faut que f tende vers une limite finie ℓ au voisinage de x_0 (afin de pouvoir définir $g(x_0)$ en posant $g(x_0) = \ell$) et que sa dérivée f' tende également vers une limite finie au voisinage de x_0 (puisque f' et g' coïncident sur $\mathscr{D}_f$).

Q 13. *Quelles propriétés de f faut-il établir pour prouver qu'elle admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ au point x_0 ?*
R 13. Réciproquement, on peut déduire le Théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$ du Théorème des accroissements finis :
– si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}_f$;
– si f tend vers une limite finie y_0 au voisinage de x_0 ;
– et si la dérivée f' tend vers une limite finie v_0 au voisinage de x_0,
alors le prolongement g de f défini en posant

$$g(x_0) = y_0$$

est non seulement continu au point x_0 mais aussi dérivable au point x_0 et enfin que $g'(x_0) = v_0$, de telle sorte que

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x) = \lim_{x \to x_0} g'(x).$$

Cela prouve que le prolongement g est en fait de classe $\mathscr{C}^1$.

Q 14. *Comment définir un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$?*
R 14. Si les conditions d'application du Théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$ ne sont pas satisfaites, il n'y a aucun moyen de définir un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$: un tel prolongement n'existe pas !
Si les conditions d'application du Théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$ sont satisfaites, on applique ce théorème : on prolonge la fonction f par continuité et le prolongement ainsi défini est en fait de classe $\mathscr{C}^1$.

Q 15. *Pourquoi ne peut-on jamais prolonger une dérivée ?*
R 15. Supposons que f soit dérivable sur $\mathscr{D}_f$. Sa dérivée f' est donc elle aussi définie sur $\mathscr{D}_f$ et seulement sur $\mathscr{D}_f$: là où f n'est pas définie, elle ne saurait être dérivable !
Pour cette raison, il serait absurde de chercher à prolonger la dérivée f' sans prolonger la fonction f.

❧ Dès lors qu'on a choisi un prolongement g de f, les dés sont jetés, on n'y peut plus rien !

- Selon les choix qui ont conduit à définir g, le prolongement est continu ou il n'est pas continu : il faut se soumettre à la réalité de l'application g.
- Si le prolongement g n'est pas continu, il ne peut *a fortiori* pas être dérivable et encore moins de classe $\mathscr{C}^1$: fin de l'histoire !
- Si au contraire on a fait en sorte que le prolongement g soit continu, de deux choses l'une :
  - ou bien g est dérivable
  - ou bien g n'est pas dérivable.

  Dans les deux cas, on ne peut que se soumettre à la réalité de l'application g.
- S'il s'avère que le prolongement g est dérivable, de deux choses l'une :
  - ou bien sa dérivée g' est continue
  - ou bien sa dérivée g' n'est pas continue.

  Cette fois encore, on ne peut que constater la réalité de g sans avoir la possibilité d'intervenir.

❧ En résumé, lorsque la fonction f n'est définie sur une partie stricte de E, on peut

- la prolonger librement en une application g définie sur E [choix total]
- sous certaines conditions, on peut choisir de la prolonger en une application g qui est continue sur E [choix contraint]
- sous certaines conditions, ce prolongement par continuité est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ [absence totale de choix].