❧ Puisque la matrice B est écrite par blocs, il faut penser à écrire les vecteurs de son noyau par blocs également.

Le vecteur

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n,1}(\mathbb{K})$$

appartient au noyau de B si, et seulement si,

$$0_{2n,1} = BX = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ A & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_2 \\ AX_1 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la colonne X appartient au noyau de B si, et seulement si, les deux sous-colonnes X_1 et X_2 appartiennent au noyau de A.

❧ **Avec une base de** $\operatorname{Ker} A$

Notons d, la dimension du noyau de A et considérons alors une base

$$\mathscr{B}_0 = (U_1, \dots, U_d)$$

du noyau de A.

Considérons maintenant la famille

$$\mathscr{B} = \left[\begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} U_d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ U_d \end{pmatrix}\right].$$

D'après les calculs qui précèdent, les vecteurs de $\mathscr{B}$ appartiennent tous au noyau de la matrice B.

► La famille $\mathscr{B}$ est libre : s'il existe des scalaires α_k, $1 \leqslant k \leqslant 2d$, tels que

$$\sum_{k=1}^{d} \alpha_k \begin{pmatrix} U_k \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=d+1}^{2d} \alpha_k \begin{pmatrix} 0 \\ U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$\sum_{k=1}^{d} \alpha_k U_k = \sum_{k=1}^{d} \alpha_{d+k} U_k = 0$$

et comme la famille $\mathscr{B}_0$ est une base de $\operatorname{Ker} A$ (par hypothèse), c'est en particulier une famille libre. On en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant 2d, \quad \alpha_k = 0$$

et donc que la famille $\mathscr{B}$ est libre.

► Enfin, si X appartient au noyau de B, alors il existe deux colonnes X_1 et X_2 appartenant au noyau de A telles que

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathscr{B}_0$ engendre le noyau de A, il existe donc deux familles de scalaires $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ et $(\alpha_k)_{d+1 \leqslant k \leqslant 2d}$ telles que

$$X_1 = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k U_k \quad \text{et} \quad X_2 = \sum_{k=1}^{d} \alpha_{d+k} U_k.$$

Par conséquent,

$$X = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k \begin{pmatrix} U_k \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=d+1}^{2d} \alpha_k \begin{pmatrix} 0 \\ U_k \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}(\mathscr{B}).$$

La famille $\mathscr{B}$ engendre donc le noyau de B.

► Comme $\mathscr{B}$ est une base de $\operatorname{Ker} B$ et que $\#(\mathscr{B}) = 2d$, la dimension de $\operatorname{Ker} B$ est égale à $2d = 2 \dim \operatorname{Ker} A$.

❧ **Avec un isomorphisme**
D'après les calculs préliminaires, l'application

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Ker} A \times \operatorname{Ker} A & \longrightarrow & \operatorname{Ker} B \\ (X_1, X_2) & \longmapsto & \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

est une bijection de $\operatorname{Ker} A \times \operatorname{Ker} A$ sur $\operatorname{Ker} B$. Il est par ailleurs clair que cette application est linéaire, donc c'est un isomorphisme de l'espace produit $\operatorname{Ker} A \times \operatorname{Ker} A$ sur $\operatorname{Ker} B$ et en particulier,

$$\dim \operatorname{Ker} B = \dim(\operatorname{Ker} A \times \operatorname{Ker} A) = 2 \dim \operatorname{Ker} A.$$

❧ **Avec le théorème du rang**
Quelles que soient les matrices $P, Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & A \\ A & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & QA \\ QA & 0_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0_n & A \\ A & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & AP \\ AP & 0_n \end{pmatrix}.$$

Si le rang de A est égal à r, alors il existe deux matrices $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que

$$QAP = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Les matrices

$$Q_0 = \begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_0 = \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & P \end{pmatrix}$$

de $\mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K})$ sont inversibles (en tant que matrices diagonales par blocs dont les blocs diagonaux sont tous inversibles) et

$$Q_0 B P_0 = \begin{pmatrix} 0_n & QAP \\ QAP & 0_n \end{pmatrix}.$$

En permutant convenablement les lignes et les colonnes (ce qui conserve le rang), on en déduit que $Q_0 B P_0$ est équivalente à

$$\begin{pmatrix} I_{2r} & 0_{2r,2n-2r} \\ 0_{2n-2r,2r} & 0_{2n-2r} \end{pmatrix}$$

et donc que

$$\operatorname{rg} B = 2r = 2 \operatorname{rg} A.$$

On déduit alors du théorème du rang que

$$\dim \operatorname{Ker} B = 2n - 2 \operatorname{rg} A = 2(n - \operatorname{rg} A) = 2 \dim \operatorname{Ker} A.$$