Formes linéaires en dimension finie

On rassemble ici quelques résultats élémentaires sur les formes linéaires, en présentant les méthodes de calcul qui permettent d'appliquer ces résultats explicitement.

[1.] On considère ici un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. On suppose que la dimension de cet espace est finie et on note d, cette dimension (avec $d \geqslant 2$).

L'espace $L(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E, dit **espace dual** de E, est noté E^*.

Hyperplans et formes linéaires

[2.] Les **hyperplans** de E sont caractérisés de deux manières.

> *Un sous-espace H de E est un hyperplan si, et seulement si, il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.*

> *Un sous-espace H de E est un hyperplan si, et seulement si, il existe une forme linéaire $\varphi \neq 0_{E^*}$ sur E telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$.*

[3.] Les propriétés suivantes des hyperplans sont connues.

> *Si H est un hyperplan de E, alors*
>
> $$\forall\, u \in E \setminus H, \qquad E = H \oplus \mathbb{K} \cdot u.$$

> *Si deux formes linéaires φ_1 et φ_2 ont même noyau H, alors ces deux formes linéaires sont proportionnelles : il existe un scalaire $\alpha \neq 0$ tel que*
>
> $$\forall\, x \in E, \quad \varphi_2(x) = \alpha \varphi_1(x).$$

Bases et bases duales

[4.] En tant qu'espace vectoriel de dimension finie, l'espace E admet au moins une base.

Si $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ est une base de E, alors chaque vecteur x de E peut se décomposer de manière unique dans $\mathscr{B}$.

On peut ainsi définir d formes linéaires e_k^*, $1 \leqslant k \leqslant d$, sur E telles que

$$\forall\, x \in E, \qquad x = \sum_{k=1}^{d} e_k^*(x) \cdot e_k. \tag{1}$$

Ces formes linéaires sont les **formes coordonnées relatives à la base** $\mathscr{B}$.

❧ Les formes coordonnées sont caractérisées par l'image de $\mathscr{B}$:

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant d, \qquad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}. \tag{2}$$

[5.] On peut ainsi caractériser le vecteur nul de E.

> *Un vecteur x de E est égal au vecteur nul 0_E si, et seulement si,*
>
> $$\forall\, \varphi \in E^*, \qquad \varphi(x) = 0.$$

[6.] On déduit de la décomposition (1) des vecteurs de E que chaque forme linéaire φ sur E peut être décomposée à l'aide des formes coordonnées relatives à la base $\mathscr{B}$.

$$\forall\, \varphi \in E^*, \forall\, x \in E, \qquad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{d} \varphi(e_k) \cdot e_k^*(x). \tag{3}$$

> *Pour toute base $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ de l'espace E, la famille $\mathscr{B}^* = (e_k^*)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ des formes coordonnées relatives à $\mathscr{B}$ est une base de l'espace dual E^*.*
> *Cette base $\mathscr{B}^*$ est la **base duale** de $\mathscr{B}$.*

[7.] L'espace dual E^* est donc un espace vectoriel de dimension finie, de même dimension que l'espace E.

Application aux projections

[8.] On considère deux sous-espaces vectoriels supplémentaires

$$E = F \oplus G$$

caractérisés par la donnée d'une base :

$$F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r), \qquad G = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_d).$$

La famille

$$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_d)$$

est alors une base de E, dite **base adaptée aux sous-espaces** F **et** G.

[9.] Les projections associées à la décomposition de E sont les endomorphismes π_F et π_G de E caractérisés par les propriétés suivantes :

$$\forall\, x \in E, \quad \pi_F(x) \in F, \quad \pi_G(x) \in G \quad \text{et} \quad x = \pi_F(x) + \pi_G(x). \tag{4}$$

On peut exprimer ces deux projections au moyen de la base $\mathscr{B}$ et de sa base duale $\mathscr{B}^* = (e_k^*)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ en relisant convenablement la décomposition (1).

$$\forall\, x \in E, \qquad \pi_F(x) = \sum_{k=1}^{r} e_k^*(x) \cdot e_k, \qquad \pi_G(x) = \sum_{k=r+1}^{d} e_k^*(x) \cdot e_k. \tag{5}$$

[10.] Cette décomposition généralise la formule bien connue des projections orthogonales.

Si l'espace E est muni d'une structure euclidienne et si $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base orthonormée du sous-espace F, alors la projection orthogonale π_F sur F est caractérisée par la relation

$$\forall\, x \in E, \quad \pi_F(x) = \sum_{k=1}^{r} \langle\, e_k \,|\, x \,\rangle \cdot e_k.$$

Base préduale

[11.] Puisque l'espace dual E^* est un espace vectoriel de dimension d, on peut supposer connue une base $\mathscr{C} = (\varphi_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ de E^*. Il est alors naturel de se demander s'il existe une base $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ de E dont la base duale serait la base $\mathscr{C}$.

C'est bien le cas et cette base $\mathscr{B}$ est la **base préduale** de $\mathscr{C}$ (ou **base antéduale**).

❧ La caractérisation du vecteur nul montre qu'il existe au plus une base $\mathscr{B}$ admettant la famille $\mathscr{C}$ comme base duale.

En effet, s'il existe deux bases $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ et $(\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ telles que

$$\forall\, 1 \leqslant j, k \leqslant d, \quad \varphi_j(e_k) = \varphi_j(\varepsilon_k)$$

alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad \forall\, 1 \leqslant j \leqslant d, \quad \varphi_j(e_k - \varepsilon_k) = 0$$

et donc $e_k = \varepsilon_k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$.

❧ L'application

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^d \\ x & \longmapsto & \big(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_d(x)\big) \end{array}$$

est linéaire ; l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont deux espaces de dimension finie, de dimensions égales ; le noyau de cette application linéaire est réduit au vecteur nul (d'après la caractérisation du vecteur nul rappelée plus haut). D'après le Théorème du rang, il s'agit donc d'un isomorphisme de E sur $\mathbb{K}^d$.

❧ L'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{K}^d$ par cette application est donc une base $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ de E et, par construction,

$$\forall\, 1 \leqslant j, k \leqslant d, \qquad \varphi_j(e_k) = \delta_{j,k}.$$

Cela prouve (2) que la famille $\mathscr{C}$ est la base duale de $\mathscr{B}$.

[12.] Un sous-espace vectoriel F de E peut être représenté **sous forme paramétrique** au moyen d'une famille génératrice.

Sachant que
$$F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n),$$
un vecteur x de E appartient à F si, et seulement si, il existe des scalaires $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ tels que
$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot u_k.$$

❧ Si la famille $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est libre, alors c'est en fait une base de F et chaque vecteur x de F admet une décomposition unique.

Sinon, le Théorème de la base incomplète permet d'extraire une base de F de la famille $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$. Quitte à modifier l'indexation des vecteurs, on peut supposer que
$$(v_1, \dots, v_r) = (u_1, \dots, u_r)$$
est une base de F et que les vecteurs $u_{r+1}, \dots, u_n$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, \dots, v_r$.

❧ Étant donnée une base $(v_1, \dots, v_r)$ de F, on peut la compléter en une base
$$\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_d)$$
de E et considérer la base duale
$$\mathscr{B}^* = (v_1^*, \dots, v_r^*, v_{r+1}^*, \dots, v_d^*).$$

❧ Pour tout vecteur $x \in F$, il existe des scalaires $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ tels que
$$x = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \cdot v_k = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \cdot v_k + \sum_{k=r+1}^{d} 0 \cdot v_k$$
et comme la décomposition de x dans la base $\mathscr{B}$ est unique, on peut identifier :
$$\forall\, r < k \leqslant d, \qquad v_k^*(x) = 0.$$
Réciproquement, si $v_k^*(x) = 0$ pour tout $r < k \leqslant d$, alors
$$x = \sum_{k=1}^{d} v_k^*(x) \cdot v_k = \sum_{k=1}^{r} v_k^*(x) \cdot v_k \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_r) = F.$$

❧ On dispose ainsi d'une **représentation cartésienne** (ou implicite)
$$F = \bigcap_{r<k\leqslant d} \mathrm{Ker}\, u_k^*$$
qui décrit F comme l'ensemble des solutions d'un système de $(d-r)$ équations linéaires homogènes indépendantes.

[13.] Réciproquement, on peut supposer que le sous-espace F est décrit par un **système d'équations cartésiennes** :
$$F = \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}\, \psi_k.$$

❧ Si $(\psi_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille de rang r dans l'espace dual E^*, alors, quitte à modifier l'indexation des formes linéaires, on peut supposer que
$$(\varphi_1, \dots, \varphi_r) = (\psi_1, \dots, \psi_r)$$
est une famille libre et que les formes linéaires $\psi_{r+1}, \dots, \psi_n$ sont des combinaisons linéaires de $\varphi_1, \dots, \varphi_r$.

❧ Comme la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ est libre, on peut la compléter en une base
$$\mathscr{C} = (\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_d)$$

de E^* et considérer la base préduale

$$\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_d).$$

Il est clair par (2) que le sous-espace $\mathrm{Vect}(v_{r+1}, \ldots, v_d)$ est contenu dans F.

Réciproquement, pour tout $x \in F$, les scalaires $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_r(x)$ sont tous nuls, donc

$$x = \sum_{k=1}^{d} \varphi_k(x) \cdot v_k = \sum_{k=r+1}^{d} \varphi_k(x) \cdot v_k \in \mathrm{Vect}(v_{r+1}, \ldots, v_d).$$

On a ainsi obtenu une **base** de F :

$$F = \mathrm{Vect}(v_{r+1}, \ldots, v_d).$$

Mise en œuvre matricielle des résultats

[14.] On note $(E_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$, la base canonique de l'espace $\mathfrak{M}_{d,1}(\mathbb{K})$ des vecteurs colonnes et $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$, la base canonique de l'espace $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ des matrices carrées.

❧ Lire une matrice en colonnes

$$P = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_d \end{pmatrix}$$

revient à la décomposer sous la forme

$$P = \sum_{k=1}^{d} C_k.E_k^\top.$$

De manière analogue, lire une matrice en lignes

$$Q = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_d \end{pmatrix}$$

revient à la décomposer sous la forme

$$Q = \sum_{k=1}^{d} E_k.L_k.$$

❧ On en déduit que

$$PQ = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} C_i.E_i^\top.E_j.L_j = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} C_i.\delta_{i,j}.L_j = \sum_{k=1}^{d} C_k.L_k$$

et que

$$QP = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} E_i.\underbrace{L_i.C_j}_{\in\mathbb{K}}.E_j^\top = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} (L_i.C_j)\cdot E_{i,j} = (L_i.C_j)_{1\leqslant i,j\leqslant d}.$$

Base duale

[15.] L'espace $E = \mathbb{K}^d$ admet une base de référence : la base canonique

$$\mathscr{B}_0 = (\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant d}.$$

La décomposition d'un vecteur de E dans la base canonique est évidente :

$$(x_1, \dots, x_d) = \sum_{k=1}^{d} x_k \cdot \varepsilon_k$$

si bien que les formes coordonnées sont évidentes elles aussi :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d,\ \forall\, x = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant d} \in \mathbb{K}^d, \quad \varepsilon_k^*(x) = x_k.$$

[16.] On peut également considérer une autre base $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ sur E. En général, cette base est caractérisée par la matrice de passage

$$P = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \longrightarrow \mathscr{B}) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(e_1, \dots, e_d).$$

La base duale $\mathscr{B}^*$ étant une famille de formes linéaires, chaque élément e_k^* de cette base est caractérisé par une matrice ligne :

$$L_k = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(e_k^*) \in \mathfrak{M}_{1,d}(\mathbb{K}).$$

La base duale $\mathscr{B}^*$ est alors caractérisée par une matrice carrée (écrite et lue ligne par ligne) :

$$Q = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}^*) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$$

et les relations (2) se traduisent par

$$QP = \big(e_i^*(e_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant d} = I_d.$$

Autrement dit, *pour exprimer dans la base canonique les formes coordonnées relatives à $\mathscr{B}$, il faut inverser la matrice de passage $P = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \longrightarrow \mathscr{B})$ et lire la matrice inverse P^{-1} ligne par ligne.*

❧ On retrouve de cette manière la formule de changement de base pour les vecteurs : si un vecteur x est représenté par la colonne X dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ et par la colonne X' dans la base $\mathscr{B}$, alors

$$X' = P^{-1}X.$$

Matrices de projection

[17.] On reprend le contexte de **[8.]** et **[9.]**.

Pour obtenir les matrices des projections π_F et π_G relatives à une certaine base de référence $\mathscr{B}_0$, on suppose que la base $\mathscr{B}$ est déterminée par la matrice de passage $P = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \longrightarrow \mathscr{B})$ lue en colonnes :

$$P = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_d \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad C_k = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(e_k) \in \mathfrak{M}_{d,1}(\mathbb{K})$$

On sait alors que la base duale est déterminée par la matrice P^{-1} lue en lignes :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_d \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad L_k = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(e_k^*) \in \mathfrak{M}_{1,d}(\mathbb{K}).$$

On en déduit que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\pi_F) = \sum_{k=1}^{r} C_k.L_k \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\pi_G) = \sum_{k=r+1}^{d} C_k.L_k.$$

❧ On relie ainsi l'identité $\pi_F + \pi_G = \mathrm{Id}_E$ à l'identité matricielle

$$PQ = \sum_{k=1}^{d} C_k.L_k = I_d.$$

[18.] Cas d'une **projection orthogonale**

On suppose que l'espace E est muni d'un produit scalaire.

Si π_F désigne la projection orthogonale sur le sous-espace F et si on connaît une base orthonormée $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_r)$ de ce sous-espace, alors

$$\forall\, x \in E, \qquad \pi_F(x) = \sum_{k=1}^{r} \langle\, e_k \,|\, x \,\rangle \cdot e_k.$$

La matrice de π_F relative à une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ de E est alors donnée par

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(p) = \sum_{k=1}^{r} C_k.C_k^\top \quad \text{où} \quad C_k = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(e_k) \in \mathfrak{M}_{d,1}(\mathbb{R}).$$

Changement de représentation : trouver une base

[19.] On suppose qu'un sous-espace F de E est défini par un système de n équations, sans supposer *a priori* que ces équations sont indépendantes.

[20.] Autrement dit, il existe une famille $(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de formes linéaires sur E telle que

$$F = \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} \varphi_k$$

et le rang de cette famille est égal à un certain $1 \leqslant r \leqslant n$. Quitte à modifier l'indexation des formes linéaires, nous supposerons que la sous-famille $(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une famille libre de l'espace dual E^* et que

$$\forall\, r < k \leqslant n, \quad \varphi_k \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r).$$

Il existe donc des scalaires $a_{k,j}$, $r < k \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant r$, tels que

$$\forall\, r < k \leqslant n, \quad \varphi_k = \sum_{j=1}^{r} a_{k,j}\varphi_j$$

et une famille $(\psi_{r+1}, \dots, \psi_d)$ de formes linéaires sur E telle que la famille

$$\mathscr{C} = (\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi_{r+1}, \dots, \psi_d)$$

soit une base de l'espace dual E^*. On considère alors la base $\mathscr{B} = (\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ de E, base préduale de $\mathscr{C}$.

Ainsi, pour $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$\begin{pmatrix}\varphi_i(\varepsilon_1) & \cdots & \varphi_i(\varepsilon_d)\end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_i) = (\delta_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant d}$$

et pour $r < i \leqslant n$,

$$\begin{pmatrix}\varphi_i(\varepsilon_1) & \cdots & \varphi_i(\varepsilon_d)\end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_i) = (a_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant d}.$$

[21.] En pratique, le sous-espace F est représenté par un système d'équations, chaque équation traduisant une égalité $\varphi_k(u) = 0$ dans une base de référence $\mathscr{B}_0$ (par exemple dans la base canonique de $E = \mathbb{K}^d$).

On part donc d'un système d'équations initial représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_1)\\ \vdots \\ \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_r)\\ \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_{r+1})\\ \vdots \\ \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_n)\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,d}(\mathbb{K})$$

et on sait qu'il existe une base $\mathscr{B}$ telle que

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_1)\\ \vdots \\ \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_r)\\ \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_{r+1})\\ \vdots \\ \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,d-r}\\ A & 0_{n-r,d-r}\end{pmatrix}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,r}\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n-r,r}(\mathbb{K}).$$

Puisqu'il s'agit d'un changement de base dans l'espace de départ, on peut traduire cette propriété par l'existence d'une matrice inversible $P \in GL_d(\mathbb{K})$ telle que

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_1)\\ \vdots \\ \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_r)\\ \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_{r+1})\\ \vdots \\ \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_n)\end{pmatrix} \times P = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,d-r}\\ A & 0_{n-r,d-r}\end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on peut passer de la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_1) \\ \vdots \\ \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_r) \\ \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_{r+1}) \\ \vdots \\ \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_n) \end{pmatrix} \quad \text{à la matrice} \quad \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,d-r} \\ A & 0_{n-r,d-r} \end{pmatrix}$$

au moyen d'opérations de pivot sur les colonnes.

Changement de représentation : trouver une représentation cartésienne

Noyau et image d'une matrice