❧ Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, sa dérivée f' est continue sur le segment $[0, 1]$, donc l'intégrale

$$\int_0^1 \left|f'(t)\right| dt$$

est bien définie (et positive).

Comme φ est continue, le produit $f\varphi$ est continu sur le segment $[0, 1]$, donc l'intégrale

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt$$

est bien définie elle aussi.

Par conséquent, N et N_φ sont bien des applications définies sur l'espace $E = \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et il est clair qu'elles prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

❧ Par linéarité de la dérivation et de l'intégrale, ainsi que par homogénéité de la valeur absolue, les deux applications N et N_φ sont homogènes.

$$\begin{aligned}
N(\lambda f) &= \left|\lambda f(0)\right| + \int_0^1 \left|\lambda f'(t)\right| dt \\
&= |\lambda|\left|f(0)\right| + \int_0^1 |\lambda|\left|f'(t)\right| dt \\
&= |\lambda|\left|f(0)\right| + |\lambda| \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt = |\lambda|\, N(f) \\
N_\varphi(\lambda f) &= \left|\int_0^1 \lambda f(t)\varphi(t)\, dt\right| + \int_0^1 \left|\lambda f'(t)\right| dt \\
&= \left|\lambda \int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt\right| + |\lambda| \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt = |\lambda| N_\varphi(f)
\end{aligned}$$

✍ *Bien entendu, il faut savoir retrouver ligne de calcul après ligne de calcul quels sont les arguments qui permettent de passer d'une expression à la suivante — autant que possible, sans la moindre hésitation.*

❧ Une somme de réels positifs (= des valeurs absolues !) est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul. Par conséquent, si $N(f) = 0$, alors

$$f(0) = \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt = 0$$

et si $N_\varphi(f) = 0$, alors

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt = \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt = 0.$$

► Dans les deux cas, on a donc

$$\int_0^1 \left|f'(t)\right| dt = 0.$$

La fonction $|f'|$ est positive (clair !) et continue (puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$) sur l'intervalle $[0, 1]$. Comme l'intégrale est nulle et que les bornes de l'intervalle d'intégration sont distinctes, on en déduit (Théorème de l'intégrale nulle) que

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad f'(t) = 0$$

et donc que la fonction f est constante sur $[0, 1]$.

► Si f est constante sur $[0, 1]$ et que $\left|f(0)\right| = 0$, alors la fonction f est identiquement nulle sur $[0, 1]$.

► Si f est constante, égale à $K \in \mathbb{R}$ sur $[0,1]$, et si

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt = 0,$$

alors

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt = K\int_0^1 \varphi(t)\,dt = 0.$$

Or l'application φ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$, donc

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt > 0$$

et par conséquent $K = 0$.

Nous avons ainsi démontré que : si $N(f) = 0$ ou si $N_\varphi(f) = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle sur $[0,1]$ (c'est-à-dire le vecteur nul de E).

❧ Les deux applications N et N_φ vérifient l'inégalité triangulaire (linéarité de la dérivation, de l'évaluation et de l'intégration ; inégalité triangulaire pour la valeur absolue et pour l'intégrale).

$$N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$$
$$N_\varphi(f+g) \leqslant N_\varphi(f) + N_\varphi(g)$$

✍ *Ici encore, il faut être capable de mener le calcul étape par étape, en sachant à chaque étape préciser quelle propriété justifie le calcul. À vous de vérifier !*

❧ Pour démontrer que les deux normes sont équivalentes, nous procédons par double inégalité.

✍ *Puisque les deux normes mélangent les valeurs de $f(0)$, $f(t)$ et $f'(t)$, on doit penser à utiliser le Théorème fondamental !*

❧ Soit $f \in E$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, on déduit du Théorème fondamental que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\,du.$$

D'après l'inégalité triangulaire (dans $\mathbb{R}$, puis la version intégrale en remarquant que les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissante : $0 \leqslant t$),

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \left|f(t)\right| \leqslant \left|f(0)\right| + \int_0^t \left|f'(u)\right| du.$$

Comme $t \leqslant 1$ et qu'on intègre une fonction positive,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \int_0^t \left|f'(u)\right| du \leqslant \int_0^1 \left|f'(u)\right| du$$

et donc

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \left|f(t)\right| \leqslant \left|f(0)\right| + \int_0^1 \left|f'(u)\right| du = N(f).$$

Comme la fonction φ est positive et que la borne supérieure est un majorant, on en déduit que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \left|f(t)\varphi(t)\right| = \left|f(t)\right|\varphi(t) \leqslant N(f)\varphi(t).$$

Comme l'intégration conserve les inégalités,

$$\int_0^1 \left|f(t)\varphi(t)\right| dt \leqslant \int_0^1 N(f)\varphi(t)\,dt = N(f)\int_0^1 \varphi(t)\,dt$$

et on déduit de l'inégalité triangulaire pour les intégrales que

$$\left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| \leqslant N(f)\int_0^1 \varphi(t)\,dt.$$

Finalement, la norme N_φ est bien dominée par la norme N : pour toute fonction $f \in E$,

$$N_\varphi(f) \leqslant \left(1 + \int_0^1 \varphi(t)\,dt\right) N(f).$$

❧ L'encadrement réciproque est sensiblement plus compliqué... Commençons par rappeler que l'intégrale

$$\Phi = \int_0^1 \varphi(t)\,dt$$

est <u>strictement</u> positive (la fonction φ est positive, continue, non identiquement nulle et les bornes dans l'ordre croissant : $0 = a < b = 1$).

Il ne fait aucun doute que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(0) = f(t) - \big[f(t) - f(0)\big].$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$\Phi.f(0) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt - \int_0^1 \big[f(t) - f(0)\big]\varphi(t)\,dt.$$

Comme plus haut, on déduit du Théorème fondamental (et de quelques autres théorèmes sur les intégrales — à vous de deviner) que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t) - f(0)\big| \leqslant \int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt$$

et donc que, par positivité de l'intégrale,

$$\left|\int_0^1 \big[f(t) - f(0)\big]\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \big|f(t) - f(0)\big|\varphi(t)\,dt \leqslant \Phi.\int_0^1 \big|f'(u)\big|\,du.$$

Par conséquent,

$$\underbrace{\Phi}_{>0} \cdot \big|f(0)\big| \leqslant \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| + \Phi \cdot \int_0^1 \big|f'(u)\big|\,du$$

et enfin, pour toute fonction $f \in E$,

$$N(f) \leqslant \frac{1}{\Phi} \cdot \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| + 2\int_0^1 \big|f'(u)\big|\,du \leqslant \left(2 + \frac{1}{\Phi}\right) N_\varphi(f).$$

✍ *Cette dernière majoration est assez grossière, mais cela n'a pas d'importance ici !*

❧ Nous avons ainsi démontré que

$$\forall\, f \in E, \quad \frac{\Phi}{2\Phi + 1} N(f) \leqslant N_\varphi(f) \leqslant (1 + \Phi) N(f),$$

où Φ est une constante <u>strictement</u> positive, et donc que les deux normes N et N_φ étaient équivalentes.