Lycée Pierre CORNEILLE **MP**
ANNÉE SCOLAIRE 2024/2025

Composition de Mathématiques

Le 2 octobre 2024 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Exercice ❖

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ et une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \quad u(x) = \varphi(x) \cdot a.$$

Le couple (a, φ) est-il unique ?

2. Démontrer qu'il existe un réel λ et une projection p tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \quad u(x) = \lambda \cdot p(x)$$

et que le couple (λ, p) est unique.

3. Caractériser le noyau et l'image de u.

❖ II – Problème ❖

1. Questions de cours

Soient E, un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et φ, une forme linéaire sur E.

1. a. On suppose que φ est continue. Donner une définition de $|||\varphi|||$ (plusieurs réponses possibles).

1. b. On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, x \in E, \quad \big|\varphi(x)\big| \leqslant K\|x\|.$$

Comparer K et $|||\varphi|||$. (On justifiera cette comparaison à l'aide de la définition choisie à la question précédente.)

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ *s'écrivant*

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k,$$

on pose

$$\|P\| = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

2. Démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$.

3. Calculer $\|X^d\|$ pour tout $d \in \mathbb{N}$.

4. On pose

$$S_d = 1 + X + \cdots + X^d.$$

Calculer $\|S_d\|$ pour tout $d \in \mathbb{N}$.

Pour tout nombre complexe z, on considère la forme linéaire

$$\varphi_z \;:\; \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$$

définie par

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad \varphi_z(P) = P(z).$$

5. On suppose dans cette question que $|z_0| > 1$.

5. a. Que dire de $\varphi_{z_0}(X^d)$ lorsque d tend vers $+\infty$?

5. b. La forme linéaire φ_{z_0} est-elle continue ?

6. On suppose dans cette question que $z_0 = 1$.

6. a. Que dire de $\varphi_{z_0}(S_d)$ lorsque d tend vers $+\infty$?

6. b. La forme linéaire φ_1 est-elle continue ?

7. On suppose dans cette question que $|z_0| < 1$.

7. a. Démontrer que

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad \big|\varphi_{z_0}(P)\big| \leqslant \frac{\|P\|}{1 - |z_0|}.$$

7. b. Démontrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_d \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\|P_d\| = 1 \quad \text{et que} \quad \varphi_{z_0}(P_d) = \sum_{k=0}^{d} |z_0|^k.$$

7. c. En déduire que la forme linéaire φ_{z_0} est continue et que

$$|||\varphi_{z_0}||| = \frac{1}{1 - |z_0|}.$$

8. Démontrer que la forme linéaire φ_z est continue si, et seulement si, $|z| < 1$.

❖ III – Problème ❖

L'espace vectoriel $E = \mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$ *est muni de la norme* $\|\cdot\|_\infty$ *définie par*

$$\forall\, M = (m_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant d} \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C}),$$
$$\|M\|_\infty = \max_{1\leqslant k,\ell\leqslant d} |m_{k,\ell}|.$$

NB : *On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'une norme.*

Partie A. Questions de continuité

On rappelle qu'une application linéaire

$$\Phi\ :\ \mathfrak{M}_d(\mathbb{C}) \to \mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$$

est continue si, et seulement si, il existe un réel $K > 0$ *tel que*

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C}), \qquad \big\|\Phi(M)\big\|_\infty \leqslant K.\|M\|_\infty.$$

1. a. Déterminer une constante $k > 0$ telle que

$$\forall\, M, N \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C}), \qquad \|MN\|_\infty \leqslant k\|M\|_\infty.\|N\|_\infty.$$

1. b. Soient deux suites de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent respectivement vers les matrices L_u et L_v. Démontrer que la suite des matrices U_nV_n converge vers la matrice L_uL_v.

2. Soit $A = (a_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant d} \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$. Démontrer que les deux applications linéaires

$$\varphi_A = [M \mapsto AM] \qquad \text{et} \qquad \psi_A = [M \mapsto MA]$$

sont continues.

3. Soit $P \in GL_d(\mathbb{C})$, une matrice inversible. Démontrer que l'application

$$\theta_P = \big[M \mapsto P^{-1}MP\big]$$

est continue.

4. Démontrer que la transposition

$$\big[M \mapsto M^\top\big]$$

est continue de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$.

Partie B. Exemples de suites de matrices

On rappelle que, par définition, une suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers la matrice* L *si, et seulement si,*

$$\lim_{n\to+\infty} \|U_n - L\|_\infty = 0.$$

5. Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} A^n = P \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} B^n = Q.$$

5. a. Démontrer que $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$.

☞ *On pourra démontrer que la suite des matrices* $A^{2p} = A^p.A^p$ *converge vers* P^2.

5. b. On suppose dans cette question seulement que A et B commutent. Démontrer que P et Q commutent.

5. c. On suppose dans cette question seulement que A est antisymétrique :

$$A^\top = -A.$$

Démontrer que $P = 0_d$.

6. Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$. On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} (AB)^n = 0_d.$$

Démontrer que $(BA)^n$ tend aussi vers la matrice nulle 0_d lorsque n tend vers $+\infty$.

☞ *On pourra s'intéresser à* $(BA)^{n+1}$.

7. On considère une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que la matrice A_n est inversible.

7. a. On suppose ici que

$$\lim_{n\to+\infty} A_n^{-1} = B.$$

Démontrer que A est inversible et que $A^{-1} = B$.

7. b. On suppose ici que $A = 0_D$. Démontrer que la suite de terme général $\|A_n^{-1}\|_\infty$ tend vers $+\infty$.

7. c. On suppose ici que la matrice A n'est pas inversible. Démontrer qu'il existe une matrice $M_0 \neq 0_d$ telle que $M_0A = 0_d$. En déduire que la suite de terme général $\|A_n^{-1}\|_\infty$ tend vers $+\infty$.

Partie C. Méthode de Newton

Soit $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$. *On considère la suite de matrices*

$$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

définie par la donnée d'une matrice

$$M_0 \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$$

et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad M_{n+1} = 2M_n - M_nAM_n.$$

On notera $B_n = M_nA$.

8. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_d - B_{n+1} = (I_d - B_n)^2.$$

9. En déduire une majoration de $\|I_d - B_n\|_\infty$ en fonction de $\|I_d - B_0\|_\infty$, de d et de n.

10. Donner une condition suffisante simple sur M_0 pour que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice I_d.

On suppose dans la suite que cette condition est vérifiée.

11. Démontrer que la matrice A est inversible.

☞ *On étudiera le noyau de A.*

12. Démontrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice A^{-1}.

❖ IV – Problème ❖

Partie A. Premier exemple

1. Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}.$$

1. a. Démontrer que la série $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in [0,1]$.

1. b. Pour quelles valeurs de $x \in [0,1]$ la série $\sum f_n(x)$ est-elle absolument convergente ?

1. c. Expliciter une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de limite nulle telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in [0,1], \qquad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant r_n.$$

Partie B. Deuxième exemple

Dans cette partie, on considère les fonctions f_n définies sur $[0,1]$ par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in [0,1], \quad f_n(x) = \alpha_n x^n (1-x)$$

où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs.

2. Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$, la série $\sum f_n(x)$ est convergente et que la somme de cette série est une fonction bornée de x :

$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in [0,1], \qquad \left|\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant M.$$

3. a. Calculer la valeur de

$$s_n = \sup_{x\in[0,1]} \bigl|f_n(x)\bigr|$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

3. b. Démontrer que la série $\sum s_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum \alpha_n/n$ converge.

4. Dans cette question, on étudie le comportement du reste :

$$r_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x)$$

en fonction de $x \in [0,1]$.

4. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de

$$\rho_n = \sup_{x\in[0,1]} \bigl|r_n(x)\bigr|$$

et démontrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \alpha_k \leqslant \rho_n \leqslant \alpha_n.$$

4. b. En déduire que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 si, et seulement si, la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.

5. a. On suppose que la série $\sum \alpha_n/n$ converge. Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.

☞ *On rappelle que la suite* $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ *est* décroissante.

5. b. Donner un exemple de suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ de limite nulle telle que la série $\sum \alpha_n/n$ diverge.

Solution I ❀ Exercice

1. Raisonnons par analyse et synthèse.

ANALYSE.— Si $u(x) = \varphi(x) \cdot a$ pour tout x, alors $\operatorname{Im} u$ est contenue dans la droite $\mathbb{R} \cdot a$. Or le rang de u est égal à 1 (sa matrice n'est pas nulle et toutes les colonnes sont proportionnelles), donc le vecteur a doit être proportionnel au vecteur $(1, 2, -1)$ qui dirige l'image de u.

De plus, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la forme linéaire φ et le vecteur a sont représentés respectivement par une matrice ligne L_0 et une matrice colonne C_0 et la factorisation $u(x) = \varphi(x) \cdot a$ se traduit par

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad AX = (L_0X)C_0 = C_0(L_0X) = (C_0L_0)X$$

et donc

$$A = C_0L_0.$$

SYNTHÈSE.— Il est clair que

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En notant a, le vecteur de $\mathbb{R}^3$, et φ, la forme linéaire représentés dans la base canonique par

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et par} \quad L_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

, on a donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \quad u(x) = \varphi(x) \cdot a.$$

❧ Cette décomposition n'est pas unique car, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, le couple $(\lambda a,\ {}^1/_\lambda \cdot \varphi)$ donne une autre factorisation possible de u.

2. Raisonnons (encore) par analyse et synthèse.

ANALYSE.— Si une factorisation $u = \lambda \cdot p$ existe, alors $\lambda \neq 0$ (puisque u n'est pas l'endomorphisme nul), donc *il faut* que $p = ({}^1/_\lambda)u$ et comme on fait l'hypothèse que p est un projecteur, *il faut* que

$$\frac{1}{\lambda^2}u^2 = \frac{1}{\lambda}u.$$

On vérifie facilement que $A^2 = 6A$, c'est-à-dire $u^2 = 6u$, donc $\lambda = 6$.

Cela prouve qu'il existe *au plus un* couple (λ, p) qui vérifie les conditions imposées.

SYNTHÈSE.— Prenons $\lambda = 6$ et posons $p = ({}^1/_6)u$. L'application p est un endomorphisme tel que

$$p^2 = \frac{1}{36}u^2 = \frac{1}{6}u = p,$$

c'est donc un projecteur et il est clair que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \quad u(x) = 6 \cdot p(x).$$

CONCLUSION.— Il existe un unique réel $\lambda = 6$ et une unique projection p tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \quad u(x) = \lambda \cdot p(x).$$

3. D'après **1.**, $u(x) = 0$ si, et seulement si, $\varphi(x) = 0$ (puisque le vecteur a n'est pas nul). Une représentation cartésienne de $\operatorname{Ker} u$ est donc $[3x_1 + x_2 - x_3 = 0]$.

Toujours d'après **1.**, le vecteur a dirige $\operatorname{Im} u$, donc

$$\operatorname{Im} u = \mathbb{R} \cdot (1, 2, -1).$$

Solution II ❀ Continuité d'une forme linéaire

1. a. Si φ est continue, alors les bornes supérieures suivantes existent (dans $\mathbb{R}$) et, comme elles sont toutes égales, elles peuvent être prises comme définition de $|||\varphi|||$.

$$\sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0_E}} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \qquad \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} |\varphi(x)| \qquad \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leqslant 1}} |\varphi(x)| \qquad \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|<1}} |\varphi(x)|$$

1. b. On note $S^1(E)$, la sphère unité de E :

$$\forall\, x \in E, \quad x \in S^1(E) \iff \|x\| = 1.$$

L'encadrement fourni prouve que φ est continue. On en déduit en particulier que

$$\forall\, x \in S^1(E), \quad |\varphi(x)| \leqslant K\|x\| = K.$$

Le majorant ne dépendant pas du paramètre x, on peut passer à la borne supérieure, ce qui nous donne

$$|||\varphi||| \leqslant K.$$

2. Dans l'expression développée du polynôme P, il n'y a qu'un nombre *fini* de coefficients a_k non nuls. Par conséquent,

$$\{|a_k|,\ k \in \mathbb{N}\}$$

est une famille finie de réels positifs. Le maximum est donc bien défini et $\|\cdot\|$ est bien une application de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{R}_+$.

❧ Si $\|P\| = 0$, alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |a_k| \leqslant \|P\| = 0$$

ce qui prouve que tous les coefficients a_k sont nuls et donc que P est le polynôme nul.

❧ Il est clair que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\|\lambda P\| = \max_{k\in\mathbb{N}} |\lambda|\,|a_k| = |\lambda|\,\|P\|.$$

❧ Enfin, si

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k,$$

alors

$$P + Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |a_k + b_k| &\leqslant |a_k| + |b_k| && \text{(inégalité triangulaire dans } \mathbb{C}) \\ &\leqslant \|P\| + \|Q\| && \text{(le maximum est un majorant)} \end{aligned}$$

et comme on a trouvé un majorant indépendant du paramètre $k \in \mathbb{N}$, on peut passer au sup :

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k + b_k| \leqslant \|P\| + \|Q\|.$$

Comme on l'a noté en préambule, cette borne supérieure est en fait un maximum et donc

$$\|P + Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|.$$

On a ainsi démontré que $\|\cdot\|$ était une norme.

3. Le seul coefficient non nul est égal à 1, donc $\|X^d\| = 1$ pour tout $d \in \mathbb{N}$.

4. De même, $\|S_d\| = 1$ pour tout $d \in \mathbb{N}$.

5. a. Par définition, $\varphi_{z_0}(X^d) = z_0^d$ et comme $|z_0| > 1$,

$$\lim_{d\to+\infty} \left|\varphi_{z_0}(X^d)\right| = +\infty.$$

5. b. Si la forme linéaire φ_{z_0} était continue, alors il existerait un réel $K > 0$ tel que

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad \left|\varphi_{z_0}(P)\right| \leqslant K\,\|P\|.$$

En particulier, d'après **[3.]** et **[5.a.]**,

$$\forall\, d \in \mathbb{N}, \quad |z_0|^d \leqslant K,$$

ce qui est impossible.

La forme linéaire φ_{z_0} n'est donc pas continue.

6. a. Par définition, pour $z_0 = 1$,

$$\varphi_{z_0}(S_d) = \sum_{k=0}^{d} 1^k = d + 1$$

donc $\varphi_1(S_d)$ tend vers $+\infty$ lorsque d tend vers $+\infty$.

6. b. D'après **[4.]**, la norme des polynômes S_d est égale à 1. D'après la question précédente, $\varphi_1(S_d)$ n'est pas majorée. Le raisonnement du **[5.b.]** prouve que la forme linéaire φ_1 n'est pas continue.

7. a. Supposons que $\deg P \leqslant d$: le polynôme P admet donc une forme développée

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

qui nous donne

$$\left|\varphi_{z_0}(P)\right| = \left|\sum_{k=0}^{d} a_k z_0^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{d} |a_k||z_0|^k$$

par inégalité triangulaire. Or (le maximum est un majorant !)

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |a_k| \leqslant \|P\|$$

et les $|z_0|^k$ sont tous positifs, donc

$$\left|\varphi_{z_0}(P)\right| \leqslant \|P\| \sum_{k=0}^{d} |z_0|^k.$$

Comme $|z_0| < 1$, la série géométrique $\sum |z_0|^k$ est une série convergente de terme général *positif* : la somme de cette série majore donc toutes les sommes partielles et on déduit de l'encadrement précédent que

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad \left|\varphi_{z_0}(P)\right| \leqslant \|P\| \sum_{k=0}^{+\infty} |z_0|^k = \frac{\|P\|}{1 - |z_0|}.$$

7. b. Il existe un réel α tel que

$$z_0 = |z_0|\, e^{i\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |z_0|^k = e^{-ik\alpha}\, z_0^k.$$

En posant

$$P_d = \sum_{k=0}^{d} e^{-ik\alpha} X^k,$$

on a donc

$$\varphi_{z_0}(P_d) = \sum_{k=0}^{d} |z_0|^k$$

et

$$\|P_d\| = \max_{0\leqslant k\leqslant d} |e^{-ik\alpha}| = 1.$$

7. c. Par **[7.a.]**, on a trouvé une constante

$$K = \frac{1}{1 - |z_0|}$$

telle que

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad \left|\varphi_{z_0}(P)\right| \leqslant K\|P\|,$$

donc la forme linéaire φ_{z_0} est continue et

$$|||\varphi_{z_0}||| \leqslant K.$$

❧ Au **[7.b.]**, on a défini des polynômes P_d tels que

$$\forall\, d \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{d} |z_0|^k = \left|\varphi_{z_0}(P_d)\right| \leqslant |||\varphi_{z_0}||| \|P_d\| = |||\varphi_{z_0}|||$$

(puisque $\|P_d\| = 1$).

Le quantificateur nous autorise à faire tendre d vers $+\infty$. On en déduit donc **[1.b.]** que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |z_0|^k = \frac{1}{1 - |z_0|} = K \leqslant |||\varphi_{z_0}|||.$$

❧ Nous avons démontré par double inégalité que

$$|||\varphi_{z_0}||| = \frac{1}{1 - |z_0|}.$$

8. On a déjà démontré que la forme linéaire φ_z était continue pour $|z| < 1$ **[7.c.]** mais pas pour $z = 1$ **[6.b.]**, ni pour $|z| > 1$ **[5.b.]**. Il nous reste à étudier le cas $|z| = 1$.

❧ Soit $z \in \mathbb{C}$, de module 1 : il existe donc un réel θ tel que

$$z = e^{i\theta}.$$

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme

$$P_d = \sum_{k=0}^{d} e^{-ik\theta} X^k$$

(en s'inspirant de **[7.a.]**) : il est clair que

$$\forall\, d \in \mathbb{N}, \quad \|P_d\| = 1 \quad \text{et} \quad \big|\varphi_z(P_d)\big| = d+1.$$

Ayant trouvé une suite de polynômes $(P_d)_{d\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall\, d \in \mathbb{N}, \quad \|P_d\| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{d\to+\infty} \big|\varphi_z(P_d)\big| = +\infty,$$

on a démontré que la forme linéaire φ_z n'était pas continue **[5.b.]**.

❧ Finalement, on a démontré que la forme linéaire φ_z était continue si, et seulement si, $|z| < 1$.

Solution III ❀ Suites de matrices

Partie A. Questions de continuité

1. a. En notant respectivement $m_{k,\ell}$, $n_{k,\ell}$ et $p_{k,\ell}$ les coefficients de matrices M, N et MN, la formule du produit matriciel est

$$\forall\, 1 \leqslant k, \ell \leqslant d, \quad p_{k,\ell} = \sum_{q=1}^{d} m_{k,q} n_{q,\ell}.$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$|p_{k,\ell}| \leqslant \sum_{q=1}^{d} |m_{k,q}|\,|n_{q,\ell}|$$

et comme le maximum est un majorant :

$$\forall\, 1 \leqslant k, \ell \leqslant d, \quad |m_{k,\ell}| \leqslant \|M\|_\infty, \quad |n_{k,\ell}| \leqslant \|N\|_\infty$$

et comme tous ces réels sont positifs,

$$\begin{aligned}\forall\, 1 \leqslant k, \ell \leqslant d, \quad |p_{k,\ell}| &\leqslant \sum_{q=1}^{d} \|M\|_\infty\, \|N\|_\infty \\ &\leqslant d\|M\|_\infty\, \|N\|_\infty.\end{aligned}$$

On a trouvé un majorant indépendant des indices k et ℓ, on peut donc passer au maximum (il n'y a qu'un nombre *fini* d'indices) :

$$\|MN\|_\infty \leqslant d\|M\|_\infty\, \|N\|_\infty.$$

> ❦ *D'après le cours, cet encadrement démontre que la multiplication interne*
>
> $$\begin{array}{ccc}\mathfrak{M}_d(\mathbb{C}) \times \mathfrak{M}_d(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_d(\mathbb{C}) \\ (M, N) & \longmapsto & MN\end{array}$$
>
> *(qui est une application <u>bilinéaire</u>) est continue.*
>
> ❦ *Si tous les coefficients de $M = N$ sont égaux à 1, alors tous les coefficients de $MN = M^2$ sont égaux à d et on a dans ce cas*
>
> $$\|MN\|_\infty = d\|M\|_\infty.\|N\|_\infty.$$
>
> *Cela prouve que le facteur d est optimal : on ne peut pas le remplacer par un facteur plus petit.*

1. b. Par hypothèse,

$$\lim_{n\to+\infty} \|U_n - L_u\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|V_n - L_v\|_\infty = 0.$$

Toute suite bornée est convergente, donc la suite de terme général $\|U_n\|_\infty$ est bornée. Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \|U_n\|_\infty \|V_n - L_v\|_\infty + \|U_n - L_u\|_\infty \|L_v\|_\infty = 0.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}&\|U_n V_n - L_u L_v\|_\infty \\ &\quad = \|U_n V_n - U_n L_v + U_n L_v - L_u L_v\|_\infty \\ &\quad \leqslant \|U_n(V_n - L_v)\|_\infty + \|(U_n - L_u)L_v\|_\infty \\ &\quad \underset{[1.a.]}{\leqslant} d\|U_n\|_\infty \|V_n - L_v\|_\infty + d\|U_n - L_u\|_\infty \|L_v\|_\infty.\end{aligned}$$

On déduit du Théorème d'encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty} U_n V_n = L_u L_v.$$

2. Les deux applications φ_A et ψ_A sont bien linéaires (propriété de la multiplication matricielle) et, d'après **[1.a.]**, pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}\big\|\varphi_A(M)\big\|_\infty &= \|AM\|_\infty \leqslant d\|A\|_\infty\, \|M\|_\infty \\ \big\|\psi_A(M)\big\|_\infty &= \|MA\|_\infty \leqslant d\|A\|_\infty\, \|M\|_\infty\end{aligned}$$

donc ces deux applications sont continues (lipschitziennes) avec

$$|||\varphi_A||| \leqslant d\|A\|_\infty \quad \text{et} \quad |||\psi_A||| \leqslant d\|A\|_\infty.$$

3. Comme la matrice P est inversible, l'application θ_P est bien définie et linéaire. On déduit de **[2.]** que, pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}\big\|\theta_P(M)\big\|_\infty &= \big\|P^{-1}(MP)\big\|_\infty \\ &\leqslant d\|P^{-1}\|_\infty \|MP\|_\infty \\ &\leqslant d^2\|P^{-1}\|_\infty \|P\|_\infty\, \|M\|_\infty.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'application linéaire θ_P est continue et

$$|||\theta_P||| \leqslant d^2\|P^{-1}\|_\infty \|P\|_\infty.$$

> *On aurait pu justifier la continuité de θ_P en l'exprimant comme une composée d'applications linéaires continues :*
>
> $$\theta_P = \psi_{P^{-1}} \circ \varphi_P$$
>
> *et en déduire que*
>
> $$|||\theta_P||| \leqslant |||\psi_{P^{-1}}|||\ |||\varphi_P|||$$
>
> *puisque la norme d'application linéaire continue est sous-multiplicative.*

4. On sait que la transposition est linéaire et il est clair sur la définition de la norme que

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C}), \qquad \|M^\top\|_\infty = \|M\|_\infty.$$

On en déduit que la transposition est continue :

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C}), \qquad \|M^\top\|_\infty \leqslant 1.\|M\|_\infty.$$

> *L'encadrement montre que la norme triple est inférieure à 1 mais la propriété précédente montre que la transposition est en fait une* ***isométrie*** *et en particulier que sa norme triple est égale à 1.*

Partie B. Exemples de suites de matrices

5. a. Par hypothèse, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite P. En tant que suite extraite d'une suite convergente, la suite $(A^{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est elle aussi convergente et les deux limites sont égales :

$$\lim_{p\to+\infty} A^{2p} = P.$$

❧ Par ailleurs, puisque la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers P, la suite des produits $A^p.A^p$ converge vers le produit des limites $P^2 = P.P$ **[1.b.]**. Par unicité de la limite,

$$P^2 = P.$$

❧ Les mêmes causes produisant les mêmes effets, on a aussi $Q^2 = Q$.

5. b. D'après **[1.b.]**, les suites de matrices A_nB_n et B_nA_n convergent respectivement vers PQ et QP.

Or $A_nB_n = B_nA_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par hypothèse), donc

$$PQ = QP$$

par unicité de la limite.

5. c. Comme la suite de terme général A^n converge vers P, on a

$$\lim_{k\to+\infty} A^{2k+1} = \lim_{k\to+\infty} A^{2k} = P$$

(suites extraites d'une suite convergente).

Comme la transposition est continue **[4.]**,

$$\lim_{k\to+\infty} (A^{2k+1})^\top = \lim_{k\to+\infty} (A^{2k})^\top = P^\top$$

(composition de limites). On sait (ou on vérifie rapidement par récurrence) que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (A^n)^\top = (A^\top)^n$$

et comme A est antisymétrique, on en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad (A^{2k+1})^\top = -A^{2k+1} \quad \text{et} \quad (A^{2k})^\top = A^{2k}$$

et donc que

$$\lim_{k\to+\infty} (A^{2k+1})^\top = -P, \qquad \lim_{k\to+\infty} (A^{2k})^\top = P.$$

Par unicité de la limite, on en déduit enfin que $P = -P$ et donc que

$$P = 0_d.$$

6. Par associativité de la multiplication matricielle,

$$(BA)^{n+1} = B.(AB)^n.A = (\varphi_B \circ \psi_A)\big((AB)^n\big).$$

Par hypothèse, la suite des matrices $(AB)^n$ tend vers 0_d. On sait **[2.]** que les applications linéaires φ_B et ψ_A sont continues. Par composition de limites,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} (\varphi_B \circ \psi_A)\big((AB)^n\big) &= (\varphi_B \circ \psi_A)\Big[\lim_{n\to+\infty} (AB)^n\Big] \\ &= (\varphi_B \circ \psi_A)(0_d) \\ &= 0_d.\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que la suite de terme général $(AB)^{n+1}$ converge vers la matrice nulle. Par conséquent, la suite de terme général $(AB)^n$ converge vers 0_d.

> *En général, il ne suffit pas de prouver qu'une suite extraite converge pour prouver la convergence d'une suite.*
> *Ici, la suite extraite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir du rang 1, donc la convergence de cette suite extraite suffit pour prouver la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

7. a. D'après **[1.b.]**, la suite des produits $A_n.A_n^{-1}$ converge vers le produit $A.B$. Or

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A_n.A_n^{-1} = I_d$$

donc $A.B = I_d$ (unicité de la limite).

Comme A et B sont des matrices carrées, cette égalité suffit à prouver que la matrice A est inversible et que la matrice B est l'inverse de A.

> *Dans un anneau quelconque, pour prouver qu'un élément a est inversible et d'inverse b, il faut prouver que*
>
> $$ab = ba = 1_A.$$
>
> *Mais l'anneau $\mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$ des matrices carrées n'est pas quelconque et le Théorème du rang permet de prouver que*
>
> $$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C}), \quad AB = I_d \implies BA = I_d.$$

7. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 = \|I_d\|_\infty = \|A_n.A_n^{-1}\|_\infty \underset{[1.a.]}{\leqslant} d\|A_n\|_\infty \|A_n^{-1}\|_\infty.$$

Comme les matrices A_n sont inversibles, elles sont distinctes de 0_d, donc $\|A_n\|_\infty > 0$ et l'inégalité précédente montre que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|A_n^{-1}\|_\infty \geqslant \frac{1}{d\|A_n\|_\infty}.$$

Comme la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice 0_d, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \|A_n\|_\infty = \|0_d\|_\infty = 0$$

et on déduit du Théorème d'encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty} \|A_n^{-1}\|_\infty = +\infty.$$

7. c. Comme la matrice A n'est pas inversible, son rang r est strictement inférieur à d. Il existe donc deux matrices inversibles Q_1 et Q_2 telles que

$$Q_1^{-1} A Q_2 = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,d-r} \\ 0_{d-r,r} & 0_{d-r} \end{pmatrix}$$

et en posant

$$P = \begin{pmatrix} 0_r & 0_{r,d-r} \\ 0_{d-r,r} & I_{d-r} \end{pmatrix},$$

il est clair que

$$PQ_1^{-1}AQ_2 = 0_d.$$

Comme la matrice Q_2 est inversible, on en déduit que

$$PQ_1^{-1}A = 0_d.$$

Comme $P \neq 0_d$ (puisque $r < d$) et que Q_1^{-1} est inversible, la matrice produit $M_0 = PQ_1^{-1}$ n'est pas la matrice nulle et on a bien

$$M_0A = 0_d.$$

> *On aurait pu raisonner géométriquement en introduisant un supplémentaire de* Ker A *pour définir une matrice* M_0 *telle que* Im A $\subset$ Ker M_0. *Cela revenait au même, mais c'était sans doute moins simple à rédiger !*

❧ Comme la matrice M_0 n'est pas nulle,

$$0 < \|M_0\|_\infty = \|M_0 A_n A_n^{-1}\|_\infty \underset{[1.a.]}{\leqslant} d\|M_0 A_n\|_\infty \|A_n^{-1}\|_\infty$$

Par continuité de ψ_{M_0} **[2.]**, la suite des matrices $M_0 A_n$ converge vers la matrice $M_0 A = 0_d$ et on déduit de l'encadrement précédent que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|A_n^{-1}\|_\infty \geqslant \frac{\|M_0\|_\infty}{d\|M_0 A_n\|_\infty}$$

et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \|A_n^{-1}\|_\infty = +\infty.$$

Partie C. Méthode de Newton

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme I_d et $B_n = M_n A$ commutent,

$$\begin{aligned}(I_d - B_n)^2 &= I_d - 2B_n + B_n^2\\ &= I_d - 2M_n A + (M_n A)(M_n A)\\ &= I_d - M_{n+1}A = I_d - B_{n+1}.\end{aligned}$$

9. D'après **[1.a.]**,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|I_d - B_{n+1}\|_\infty \leqslant d\|I_d - B_n\|_\infty^2.$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|I_d - B_n\|_\infty \leqslant d^{2^n-1}\|I_d - B_0\|_\infty^{2^n}.$$

> *La démonstration par récurrence proprement dite ne pose aucune difficulté. Mais comme le résultat n'est pas donné par l'énoncé, il faut prendre le temps de le deviner au brouillon (méthode habituelle : on passe de* $\|I_d - B_n\|_\infty$ *à* $\|I_d - B_{n-1}\|_\infty$*, puis à* $\|I_d - B_{n-2}\|_\infty$*, etc).*

10. On peut réécrire l'encadrement précédent sous une forme un peu différente :

$$\|I_d - B_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{d} \cdot \left[d\|I_d - B_0\|_\infty\right]^{2^n}.$$

Le second membre <u>n'est pas</u> le terme général d'une suite géométrique, c'est celui d'une suite extraite d'une suite géométrique. Il suffit que

$$0 \leqslant d\|I_d - B_0\|_\infty = d\|I_d - M_0 A\|_\infty < 1$$

pour que la suite de terme général $\|I_d - B_n\|_\infty$ converge vers 0.

11. Considérons une colonne $X \in \mathfrak{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ dans le noyau de A et la matrice

$$N = \begin{pmatrix} X & X & \cdots & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C}).$$

On a donc $AN = 0_d$ et par conséquent

$$(I_d - M_0 A)N = I_d N = N.$$

D'après **[1.a.]**,

$$\|N\|_\infty = \left\|(I_d - M_0 A)N\right\|_\infty \leqslant d\|I_d - M_0 A\|_\infty \|N\|_\infty.$$

Or on suppose ici que

$$d\|I_d - M_0 A\|_\infty < 1,$$

ce qui implique que $\|N\|_\infty = 0$ et donc que $X = 0_{d,1}$.

On a ainsi démontré que le noyau de A est réduit à la colonne nulle et, comme A est une matrice carrée, on en déduit que A est inversible.

12. On sait **[10.]** que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice I_d.

Comme la matrice A est inversible et que l'application linéaire $\psi_{A^{-1}}$ est continue **[2.]**, on en déduit par composition de limite que la suite de terme général

$$\psi_{A^{-1}}(B_n) = B_n A^{-1} = M_n$$

converge vers la matrice

$$\psi_{A^{-1}}(I_d) = I_d A^{-1} = A^{-1}.$$

> *Cet algorithme a peu d'intérêt pratique car il n'est pas aussi efficace que l'algorithme du pivot et réclame en outre de "bien" choisir la matrice* M_0 *pour converger : la condition du* **[10.]** *signifie que la matrice initiale* M_0 *doit être assez proche de* A^{-1} *!*

Solution IV ❀ Deux séries de fonctions

Partie A. Premier exemple

1. a. Pour tout $x \in [0,1]$, la suite de terme général

$$|f_n(x)| = \frac{x^2+n}{n^2} = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$$

est décroissante et tend vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in [0,1]$.

1. b. Pour tout $x \in [0,1]$, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$|f_n(x)| \sim \frac{1}{n}.$$

Comme la série harmonique $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif, on en déduit que la série (de terme général positif) $\sum|f_n(x)|$ est divergente.

Par conséquent, la série $\sum f_n(x)$ n'est absolument convergente pour *aucune* valeur de $x \in [0,1]$.

1. c. Puisque les hypothèses du critère spécial des séries alternées sont vérifiées d'après **1.a.**, le reste de $\sum f_n(x)$ est majoré en valeur absolue par le premier terme négligé. Ainsi

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |f_n(x)| = \frac{x^2+n}{n^2} \leqslant \frac{n+1}{n^2}.$$

Le majorant ainsi obtenu est indépendant de $x \in [0,1]$: on peut donc passer au sup pour obtenir

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [0,1], \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \frac{n+1}{n^2}$$

et il est clair que la suite de terme général $r_n = {(n+1)}/{n^2}$ tend vers 0.

Partie B. Deuxième exemple

2. Comme $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs, c'est une suite bornée qui tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall\, 1 \leqslant n \leqslant k, \quad 0 \leqslant \ell \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_1 \tag{1}$$

donc

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \alpha_1(1-x)x^n. \tag{2}$$

Pour tout $x \in [0,1[$, la série géométrique $\sum x^n$ est absolument convergente, donc la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.

Par ailleurs, pour $x = 1$, le terme général $f_n(x)$ est identiquement nul, donc $\sum f_n(1)$ est (absolument) convergente et sa somme est nulle.

On peut donc sommer les encadrements (2) et passer à la limite pour obtenir

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad 0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \alpha_1(1-x)\frac{1}{1-x} = \alpha_1,$$

en remarquant que cet encadrement, de façon évidente, est encore vrai pour $x = 1$.

3. a. La fonction f_n est clairement positive et dérivable sur $[0,1]$. Comme

$$f_n'(x) = \alpha_n\big[n-(n+1)x\big]x^{n-1},$$

il est clair que f_n atteint son maximum pour $x = {}^{n}\!/_{(n+1)}$ et que

$$s_n = f_n\Big(\frac{n}{n+1}\Big) = \frac{\alpha_n}{n+1}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-n}.$$

3. b. D'après l'expression de s_n, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$s_n \sim \frac{1}{e}\,\frac{\alpha_n}{n}.$$

D'après le théorème de comparaison pour les séries de termes généraux *positifs*, la série $\sum s_n$ converge si, et seulement si, la série de terme général ${}^{\alpha_n}\!/_{ne}$ converge, donc la série $\sum s_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum {}^{\alpha_n}\!/_n$ converge.

4. a. Précisons les encadrements (2) en tenant compte des encadrements (1) :

$$\forall\, k \geqslant n,\ \forall\, x \in [0,1], \quad \ell x^k(1-x) \leqslant f_k(x) \leqslant \alpha_n x^k(1-x).$$

En sommant à partir de $k = n$, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1[, \quad 0 \leqslant \ell x^n \leqslant r_n(x) \leqslant \alpha_n x^n. \tag{3}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $|r_n|$ est bornée sur $[0,1[$. Comme elle est nulle en $x = 1$, on en déduit qu'elle admet une borne supérieure ρ_n sur $[0,1]$ et l'encadrement précédent prouve que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \rho_n \leqslant \alpha_n. \tag{4}$$

Comme la borne supérieure est un majorant, on déduit de (3) que

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad \ell x^n \leqslant \rho_n.$$

Ayant trouvé un majorant indépendant de $x \in [0,1[$, on peut passer au sup pour obtenir :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \ell \leqslant \rho_n. \tag{5}$$

4. b. Si la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0, alors $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 par l'encadrement (4).

Réciproquement, si $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $\ell = 0$ par (5), ce qui signifie que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.

5. a. Notons toujours ℓ, la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$. Si $\ell \neq 0$, alors $\ell > 0$ (puisque la suite α est positive) et par conséquent, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{\alpha_n}{n} \sim \frac{\ell}{n}.$$

Comme $\ell > 0$, la série de terme général *positif* $\sum {}^{\ell}\!/_n$ est divergente et, par comparaison, la série de terme général *positif* $\sum {}^{\alpha_n}\!/_n$ est aussi divergente.

Par contraposée, si la série $\sum {}^{\alpha_n}\!/_n$ est convergente, alors la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.

5. b. Prenons α_1 quelconque et posons

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \alpha_n = \frac{1}{\ell n\, n}.$$

Il est clair que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0. Cependant, la série $\sum {}^{\alpha_n}\!/_n$ est divergente puisque, par comparaison avec une intégrale,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k} \sim \ell n\, \ell n\, n$$

lorsque n tend vers $+\infty$ (série de Bertrand, qui n'est pas au programme — la comparaison avec les intégrales doit donc être détaillée).