On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$T(f) = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_{-1}^0 f(t)\,dt.$$

1❧ *L'application T est-elle continue lorsque E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$?*

2❧ *L'application T est-elle continue lorsque E est muni de la norme $\|\cdot\|_1$?*

❧ Soit $f \in E$. Comme f est continue sur les deux segments $[-1,0]$ et $[0,1]$, les deux intégrales sont bien définies et par conséquent T est une application de E dans $\mathbb{R}$.

La linéarité de l'intégrale prouve alors que T est une forme linéaire et il nous reste à étudier s'il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que

$$\forall\, f \in E, \qquad \big|T(f)\big| \leqslant K\|f\|.$$

1❧ Toute fonction continue sur un segment est bornée et, par définition,

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} \big|f(t)\big|.$$

La borne supérieure est un majorant, donc

$$\forall\, t \in [-1,1], \quad \big|f(t)\big| \leqslant \|f\|_\infty.$$

L'intégration conservant les inégalités, on en déduit que

$$\int_0^1 \big|f(t)\big|\,dt \leqslant (1-0)\cdot\|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \int_{-1}^0 \big|f(t)\big|\,dt \leqslant [0-(-1)]\cdot\|f\|_\infty.$$

D'après l'inégalité triangulaire intégrale, pour toute fonction $f \in E$,

$$\begin{aligned}\big|T(f)\big| &\leqslant \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| + \left|\int_{-1}^0 f(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \big|f(t)\big|\,dt + \int_{-1}^0 \big|f(t)\big|\,dt \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Cela prouve que la forme linéaire T est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ et que, dans ce cas, $|||T||| \leqslant 2$.

✍ *Nous allons maintenant prouver que $|||T||| = 2$.*
Pour cela, la théorie nous indique deux possibilités :
— Ou bien il existe une fonction $f_0 \in E$, distincte de 0_E, telle que

$$\big|T(f_0)\big| = 2\|f_0\|_\infty$$

ce qui prouve que

$$|||T||| \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{f\neq 0_E} \frac{\big|T(f)\big|}{\|f\|_\infty} \geqslant 2$$

et permet de conclure (par double inégalité).

— Ou bien une telle fonction f_0 n'existe pas et il faut trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de E, évidemment distinctes de 0_E, telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\big|T(f_n)\big|}{\|f_n\|_\infty} = 2,$$

ce qui prouve également que $|||T||| \geqslant 2$ et permet de conclure de la même manière.

❧ Commençons donc par chercher une fonction f_0 continue sur $[-1,1]$, telle que

$$\|f_0\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \big|T(f_0)\big| = 2.$$

D'après les calculs qui précèdent, cela revient à supposer que

$$\|f_0\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{0} \big|f_0(t)\big|\,dt = \int_0^1 \big|f_0(t)\big|\,dt = 1.$$

La continuité de f_0 permet d'invoquer le Théorème de nullité de l'intégrale qui nous dit que

$$\forall\, t \in [-1,1], \qquad \big|f_0(t)\big| = 1.$$

Mais la toute première majoration impose que

$$\forall\, t \in [-1,0], \quad f_0(t) = -1 \quad \text{et} \quad \forall\, t \in [0,1], \quad f_0(t) = +1$$

(cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire) : c'est impossible !

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n, la fonction continue et affine par morceaux qui vaut

— -1 sur le segment $[-1, {}^{-1}\!/_{2^n}]$;
— $+1$ sur le segment $[{}^{1}\!/_{2^n}, 1]$
— et $2^{n+1}t$ sur le segment $[{}^{-1}\!/_{2^n}, {}^{1}\!/_{2^n}]$.

✍ *Il faut faire une figure pour comprendre qu'on choisit des fonctions <u>continues</u> qui s'approchent autant que possible de la fonction f_0 qu'on cherchait précédemment.*

Il est clair que les f_n appartiennent à E et que $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, on vérifie sans peine que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T(f_n) = 2\Big(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\Big).$$

✍ *"Sans peine"... à condition d'avoir tracé le graphe de f_n !*

Il existe donc une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs non nuls de E tels que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\big|T(f_n)\big|}{\|f_n\|_\infty} = 2,$$

ce qui prouve que $|||T||| = 2$.

2❧ Nous considérons maintenant la norme définie par

$$\forall\, f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_{-1}^{1} \big|f(t)\big|\,dt.$$

Par inégalité triangulaire (dans $\mathbb{R}$, puis pour les intégrales),

$$\begin{aligned} \big|T(f)\big| &\leqslant \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| + \left|\int_{-1}^{0} f(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \int_{-1}^{1} \big|f(t)\big|\,dt = \|f\|_1 \end{aligned}$$

ce qui prouve que la forme linéaire T est continue aussi pour la norme $\|\cdot\|_1$, mais cette fois $|||T||| \leqslant 1$.

❧ La connaissance des cas d'égalité nous disent la même chose que plus haut :

— les intégrales sur $[-1,0]$ et sur $[0,1]$ doivent être de signes opposés (cas d'égalité pour l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$) ;
— la fonction f_0 doit être de signe constant sur $[-1,0]$ et de signe constant sur $[0,1]$ (cas d'égalité pour l'inégalité triangulaire des intégrales).

Il suffit de considérer la fonction $f_0 = [t \mapsto t]$ pour que ces contraintes soient vérifiées !

On constate alors que

$$T(f_0) = \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = 1 \quad \text{et que} \quad \|f_0\|_1 = \int_{-1}^{1} |t|\,dt = 1,$$

ce qui prouve que

$$|||T||| \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{f \neq 0_E} \frac{\big|T(f)\big|}{\|f\|_1} \geqslant \frac{\big|T(f_0)\big|}{\|f_0\|_1} = 1$$

et donc que $|||T||| = 1$ par double inégalité.