On considère l'espace E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, des nombres réels

$$0 \leqslant a_0 < a_1 < \cdots < a_n \leqslant 1$$

et la famille $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à ces abscisses (considérés comme des vecteurs de E).
Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$T(f) = \sum_{k=0}^{n} f(a_k)L_k.$$

L'application T est-elle continue ?

Tout d'abord, il est clair que T est une application linéaire de E dans E.
La borne supérieure étant un majorant,

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n,\ \forall\, t \in [0,1], \quad \left|L_k(t)\right| \leqslant \|L_k\|_\infty$$

et

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \left|f(a_k)\right| \leqslant \|f\|_\infty.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \left|T(f)(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left|f(a_k)\right| \left|L_k(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|f\|_\infty \|L_k\|_\infty.$$

On a un majorant indépendant de t, ce qui nous permet de passer à la borne supérieure par rapport à $t \in [0,1]$:

$$\forall\, f \in E, \qquad \left\|T(f)\right\|_\infty \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \|L_k\|_\infty\right) \|f\|_\infty.$$

Cet encadrement prouve que l'application linéaire T est continue et que

$$|||T||| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|L_k\|_\infty.$$

✍ *On ne calculera la valeur exacte de $|||T|||$ (je n'ai aucune idée de la manière de faire !), mais on peut deviner sur cet encadrement que, plus le nombre de points d'interpolation est élevé, plus la valeur de $|||T|||$ est grande.*

Autrement dit, l'interpolation au sens de Lagrange est une très mauvaise méthode d'approximation — cf. l'article sur le "phénomène de RUNGE" sur Wikipédia.