1❧ *L'espace* $E = \ell^\infty$ *des suites numériques bornées est muni de la norme définie par*

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|.$$

Pour toute suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1} \in E$*, on considère la suite*

$$T(u) = \Big(u_1, \frac{u_1+u_2}{2}, \frac{u_1+u_2+u_3}{3}, \dots, \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}, \dots\Big).$$

Étudier la continuité de l'application T*.*

2❧ *On restreint l'application* T *au sous-espace* F *des familles sommables muni de la norme usuelle définie par*

$$\|u\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|.$$

Alors T *est une application continue de* $(F, \|\cdot\|_1)$ *dans* $(E, \|\cdot\|_\infty)$*, mais* F *n'est pas stable par* T*.*

1❧ Soit $u \in E$. Comme la borne supérieure est un majorant,

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad |u_n| \leqslant \|u\|_\infty$$

et, par inégalité triangulaire,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \left|\frac{u_1+\cdots+u_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k| \leqslant \|u\|_\infty.$$

❧ Cet encadrement prouve pour commencer que $T(u) \in E$ pour toute suite $u \in E$, donc T est bien une application de E dans E.

❧ Il est clair que T est une application linéaire.

❧ Dans l'encadrement qu'on vient de trouver, le majorant est indépendant de l'indice n. On peut donc passer à la borne supérieure par rapport à $n \in \mathbb{N}^*$ et obtenir

$$\forall\, u \in E, \quad \big\|T(u)\big\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty.$$

Cet encadrement prouve que l'application linéaire T est continue sur E et aussi que $|||T||| \leqslant 1$.

❧ Si v est la suite constante égale à 1, alors $T(v) = v$ et

$$\big\|T(v)\big\|_\infty = \|v\|_\infty = 1,$$

ce qui prouve que $|||T||| \geqslant 1$.

On a prouvé par double inégalité que $|||T||| = 1$.

2❧ Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille sommable, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée (elle est nécessairement convergente, de limite nulle). Cela pour justifier que l'espace F est bien un sous-espace de E.

❧ En reprenant les calculs précédents, pour toute famille $u \in F$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{u_1+\cdots+u_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k| \leqslant \frac{\|u\|_1}{n}.$$

On en déduit que

$$\forall\, u \in F, \quad \big\|T(u)\big\|_\infty \leqslant \|u\|_1$$

et donc que T est continue en tant qu'application linéaire de $(F, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

❧ Plus précisément, il est clair que la famille

$$v = (v_1, v_2, \dots) = (1, 0, \dots)$$

est sommable (le terme général est nul à partir d'un certain rang), que

$$\|v\|_1 = 1$$

et que

$$T(v) = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots).$$

On a donc trouvé un vecteur $v \in F$ tel que

$$\|v\|_1 = 1 \quad \text{et} \quad \left\|T(v)\right\|_\infty = 1,$$

ce qui prouve que $|||T||| = 1$ à nouveau.

❧ Il reste à vérifier que le sous-espace F n'est pas stable par T.

Pour cela, on considère une famille sommable V non nulle de terme général positif, de telle sorte que la série $\sum v_n$ soit convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \|v\|_1 > 0.$$

On en déduit que

$$\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\|v\|_1}{n}.$$

Comme $\|v\|_1 > 0$, la série $\sum \|v\|_1/n$ est divergente, ce qui prouve que $T(v) \notin F$.