L'espace vectoriel E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est muni de la norme définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \big|f(t)\big|.$$

Pour toute fonction $f \in E$, on considère l'application $T(f)$ définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad T(f)(x) = \int_0^1 (x+t)f(t)\,dt.$$

1❧ *Démontrer que T est un endomorphisme de E. Cet endomorphisme est-il surjectif ? injectif ?*

2❧ *Démontrer que T est continu.*

1❧ Pour toute fonction $f \in E$ et tout réel $x \in [0,1]$, l'application

$$[t \mapsto (x+t)f(t)]$$

est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale $T(f)(x)$ est bien définie.

Par linéarité de l'intégrale,

$$T(f)(x) = \int_0^1 tf(t)\,dt + x\int_0^1 f(t)\,dt,$$

ce qui prouve que $T(f)$ est une fonction affine et en particulier une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall f \in E, \qquad T(f) \in E.$$

Il est clair que T est linéaire (linéarité de l'intégrale), donc T est bien un endomorphisme de E.

❧ Comme $T(f)$ est une fonction affine et que toute fonction continue sur $[0,1]$ n'est pas une fonction affine, il est clair que T n'est pas surjectif.

❧ Comme E est un espace vectoriel de dimension infinie et que $\operatorname{Im} T$ est un espace de dimension finie (l'espace des fonctions affines est un plan vectoriel et $\operatorname{Im} T$ est contenue dans ce plan), l'endomorphisme T ne peut pas être injectif.

✍ *On peut vérifier qu'il existe une fonction polynomiale de degré 2 :*

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = t^2 + at + b$$

telle que

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 tf(t)\,dt = 0$$

et donc telle que $T(f) = 0_E$.

Deux manières possibles :

— *on détermine a et b en posant, puis en résolvant un système de deux équations linéaires ;*

— *on considère le produit scalaire défini par*

$$\langle\, h \,|\, g \,\rangle = \int_0^1 g(t)h(t)\,dt$$

et on applique l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille libre

$$\big([t \mapsto t^d]\big)_{0\leqslant d\leqslant 2}.$$

❧ Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0,1]$, par inégalité triangulaire (pour les réels, puis pour les intégrales),

$$\begin{aligned}\big|T(f)(x)\big| &\leqslant \left|\int_0^1 tf(t)\,dt\right| + |x|\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \big|tf(t)\big|\,dt + \int_0^1 \big|f(t)\big|\,dt.\end{aligned}$$

Or la borne supérieure est un majorant, donc

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t)\big| \leqslant \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \big|tf(t)\big| \leqslant t\cdot\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty.$$

Ainsi

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \big|T(f)(x)\big| \leqslant 2\|f\|_\infty.$$

On a un majorant indépendant du paramètre $x \in [0,1]$, on peut donc passer au sup :

$$\forall\, f \in E, \qquad \big\|T(f)\big\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty$$

ce qui prouve que l'application linéaire T est continue et que $|||T||| \leqslant 2$.

✍ *La norme subordonnée de T est strictement inférieure à 2 ! On peut en effet reprendre le calcul précédent en majorant plus finement : comme*

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|tf(t)\big| \leqslant t\cdot\|f\|_\infty,$$

on obtient

$$\big|T(f)(x)\big| \leqslant \left(\int_0^1 t\,dt + |x|\right)\|f\|_\infty \leqslant \frac{3}{2}\|f\|_\infty,$$

ce qui prouve que $|||T||| \leqslant 3/2$.

En considérant la fonction constante $f_0 = [t \mapsto 1]$, on a bien sûr $\|f_0\|_\infty = 1$ et

$$\forall\, x \in [0,1], \quad T(f_0)(x) = x + \frac{1}{2} \geqslant 0$$

donc

$$\big\|T(f_0)\big\|_\infty = T(f_0)(1) = \frac{3}{2}.$$

Et c'est ainsi que $|||T||| = 3/2$.