✍ *Exercice classique, qui suit le même modèle que ses voisins :*
— *on définit un espace vectoriel de dimension finie (généralement 3 ou 4) ;*
— *on munit cet espace vectoriel d'un produit scalaire inspiré par l'énoncé ;*
— *on interprète la question posée comme la recherche du minimum de*

$$\left\|f_0 - g\right\|^2$$

lorsque g *parcourt un sous-espace* G *de* E *;*
— *grâce à la structure euclidienne de* E*, il suffit d'identifier le projeté orthogonal* $\pi(f_0)$ *de* f_0 *sur le sous-espace* G *pour conclure :*

$$\min_{g \in G} \left\|f_0 - g\right\|^2 = \left[\, d(f_0, G)\right]^2 = \langle\, f_0 \,|\, f_0 - \pi(f_0)\,\rangle .$$

En général, il faut s'abstenir de chercher une base orthonormée du sev G *(même quand* $\dim G = 2$ *!). Il est préférable de déterminer* $\pi(f_0)$ *en utilisant la caractérisation usuelle du projeté orthogonal* ***[33, 34]*** *:*

$$\pi(f_0) \in G, \qquad f_0 - \pi(f_0) \in G^{\perp}$$

en explicitant une matrice de Gram.

❧ On considère le sous-espace vectoriel E de $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ engendré par les trois fonctions

$$f_0 = \left[t \mapsto \sqrt{t}\right], \quad g_0 = [t \mapsto 1] \quad \text{et} \quad g_1 = [t \mapsto t] .$$

Quelles que soient les fonctions u et v dans E, on pose

$$\langle\, u \,|\, v\,\rangle = \int_0^1 u(t)v(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t}}.$$

L'application $\langle\, \cdot \,|\, \cdot\,\rangle$ est bien un produit scalaire.

► Si h est continue sur le segment $[0,1]$, alors la fonction

$$\Phi_h = \left[t \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t}}\right]$$

est continue sur l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$ et comme h est bornée (en tant que fonction <u>continue</u> sur un <u>segment</u>),

$$\frac{h(t)}{\sqrt{1-t}} \underset{t \to 1}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\Big).$$

La fonction de référence est intégrable au voisinage de 1, cela prouve que Φ_h est intégrable sur $[0,1[$ et donc que l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 h(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$$

est convergente.

Ainsi, $\langle\, \cdot \,|\, \cdot\,\rangle$ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

► Toutes les intégrales considérées étant convergentes, il est clair que $\langle\, \cdot \,|\, \cdot\,\rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique et positive.

► On considère maintenant une fonction $h \in E$ telle que $\langle\, h \,|\, h\,\rangle = 0$, c'est-à-dire

$$\int_0^1 h^2(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 0.$$

On intègre ici une fonction <u>continue</u> et <u>positive</u>

$$\left[t \mapsto \frac{h^2(t)}{\sqrt{1-t}}\right]$$

sur un intervalle de longueur strictement positive ($0 < 1$) et l'intégrale est, par hypothèse, nulle. D'après le Théorème de nullité de l'intégrale,

$$\forall\, t \in [0, 1[, \qquad \frac{h^2(t)}{\sqrt{1-t}} = 0.$$

On en déduit que

$$\forall\, t \in [0, 1[, \qquad h(t) = 0.$$

Mais comme h est continue en $t = 1$, on en déduit aussi que

$$h(1) = \lim_{\substack{t \to 1 \\ <}} h(t) = 0$$

et donc que

$$\forall\, t \in [0, 1], \qquad h(t) = 0.$$

On a ainsi démontré que $h = 0_E$ et donc que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

❧ Lorsque les paramètres a et b parcourent $\mathbb{R}^2$, la fonction

$$[t \mapsto a + bt]$$

parcourt l'hyperplan $G = \mathrm{Vect}(g_0, g_1)$ de E. Il s'agit donc ici de calculer

$$\min_{g \in G} \|f_0 - g\|^2$$

et pour cela, nous allons calculer le projeté orthogonal $\pi(f_0)$ de f_0 sur G.

► Le vecteur $\pi(f_0)$ appartient à G si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\pi(f_0) = ag_0 + bg_1. \tag{1}$$

Le vecteur $f_0 - \pi(f_0)$ est orthogonal à $G = \mathrm{Vect}(g_0, g_1)$ si, et seulement si,

$$\big\langle f_0 - \pi(f_0) \,\big|\, g_0 \big\rangle = \big\langle f_0 - \pi(f_0) \,\big|\, g_1 \big\rangle = 0,$$

c'est-à-dire [en tenant compte de (1) et en développant les produits scalaires]

$$\begin{cases} a\langle g_0 \mid g_0 \rangle + b\langle g_1 \mid g_0 \rangle = \langle f_0 \mid g_0 \rangle \\ a\langle g_0 \mid g_1 \rangle + b\langle g_1 \mid g_1 \rangle = \langle f_0 \mid g_1 \rangle. \end{cases} \tag{2}$$

✍ *Il s'agit donc de résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues (a et b), mais il faut auparavant calculer quelques produits scalaires :*

$$\langle g_0 \mid g_0 \rangle, \quad \langle g_0 \mid g_1 \rangle = \langle g_1 \mid g_0 \rangle, \quad \langle f_0 \mid g_0 \rangle, \quad \langle f_0 \mid g_1 \rangle.$$

C'est la partie fastidieuse de l'exercice !

► Tout d'abord,

$$\langle g_0 \mid g_0 \rangle = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2\big[-\sqrt{1-t}\big]_0^1 = 2.$$

► En posant $u = \sqrt{1-t}$,

$$\langle g_0 \mid g_1 \rangle = \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t}} = 2\int_0^1 (1-u^2)\,du = \frac{4}{3}$$

et

$$\langle g_1 \mid g_1 \rangle = \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t}} = 2\int_0^1 (1-u^2)^2\,du = \frac{16}{15}.$$

Il est intéressant de remarquer (pour la fin de l'exercice) que

$$\langle f_0 \,|\, f_0 \rangle = \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t}} = \langle g_0 \,|\, g_1 \rangle = \frac{4}{3}.$$

► En posant $v = \sqrt{t/(1-t)}$,

$$\begin{aligned} \langle f_0 \,|\, g_0 \rangle &= \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{v^2\,dv}{(1+v^2)^2} \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2} - 2\int_0^{+\infty} \frac{dv}{(1+v^2)^2}. \end{aligned}$$

En intégrant par parties,

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} 1 \cdot \frac{dv}{1+v^2} = \int_0^{+\infty} v \cdot \frac{2v\,dv}{(1+v^2)^2}$$

et il reste alors

$$\langle f_0 \,|\, g_0 \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\pi}{2}.$$

✍ *Il faut retenir cette méthode : pour calculer une telle intégrale, il faut intégrer par parties une intégrale dont on connaît la valeur — c'est contre-intuitif !*

► Avec le même changement de variable,

$$\langle f_0 \,|\, g_1 \rangle = \int_0^1 t\sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2v^2\,dv}{(1+v^2)^2} - \int_0^{+\infty} \frac{2v^2\,dv}{(1+v^2)^3}.$$

L'avant-dernière intégrale a déjà été calculée et la dernière intégrale s'obtient elle aussi en intégrant par parties :

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^{+\infty} 1 \cdot \frac{dv}{(1+v^2)^2} = \int_0^{+\infty} v \cdot \frac{2 \cdot 2v\,dv}{(1+v^2)^3}.$$

On en déduit que

$$\langle f_0 \,|\, g_1 \rangle = \frac{3\pi}{8}.$$

► Il s'agit donc de résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} 2a + \frac{4}{3}b = \frac{\pi}{2} \\ \frac{4}{3}a + \frac{16}{15}b = \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est

$$(a, b) = \left(\frac{3\pi}{32}, \frac{15\pi}{64}\right).$$

❧ Le minimum cherché est, d'après le cours,

$$\begin{aligned} \langle f_0 \,|\, f_0 - \pi(f_0) \rangle &= \langle f_0 \,|\, f_0 - ag_0 - bg_1 \rangle \\ &= \langle f_0 \,|\, f_0 \rangle - a\langle f_0 \,|\, g_0 \rangle - b\langle f_0 \,|\, g_1 \rangle \end{aligned}$$

et on trouve, d'après ce qui précède :

$$\big[d(f_0, G)\big]^2 = \langle f_0 \,|\, f_0 - \pi(f_0) \rangle = \frac{4}{3} - \frac{69\pi^2}{512}.$$

✍ *Bonne nouvelle ! Il n'y a pas d'autre intégrale à calculer !*
Comparer aussi avec la formule naïve :

$$\begin{aligned} \big[d(f_0, G)\big]^2 &= \|f_0 - \pi(f_0)\|^2 \\ &= \langle f_0 \,|\, f_0 \rangle + a^2\langle g_0 \,|\, g_0 \rangle + b^2\langle g_1 \,|\, g_1 \rangle \\ &\quad - 2a\langle f_0 \,|\, g_0 \rangle - 2b\langle f_0 \,|\, g_1 \rangle + 2ab\langle g_0 \,|\, g_1 \rangle \end{aligned}$$

qui est bien plus pénible à traiter.