Composition de Mathématiques

Le 6 novembre 2024 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Rappels de cours

On aura l'occasion d'appliquer plusieurs fois ces deux théorèmes — et il faudra le faire avec soin (en vérifiant, dans l'ordre, toutes les conditions d'application).

Intégration par parties
Soient f *et* g, *deux fonctions de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur l'intervalle ouvert* $]a, b[$. *On suppose que*

1. *l'intégrale généralisée*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

est convergente ;

2. *que le produit* $f(t)g(t)$ *tend vers un réel* ℓ_a *lorsque* t *tend vers* a

3. *et vers un réel* ℓ_b *lorsque* t *tend vers* b.

Alors l'intégrale généralisée

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$

est convergente et

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = (\ell_b - \ell_a) - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

Convergence dominée
On considère un intervalle I *tel que*

$$[a, b] \subset I \subset]a, b[$$

et une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions intégrables sur* I. *On suppose que*

1. *pour tout* $t \in I$, *la suite de terme général* $v_n(t)$ *converge vers un réel noté* $v(t)$ *;*

2. *que la fonction* $v : I \to \mathbb{R}$ *ainsi définie est continue par morceaux sur l'intervalle* I

3. *et qu'il existe une fonction* $\Theta : I \to \mathbb{R}$, *intégrable sur* I *et telle que*

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|v_n(t)\big| \leqslant \Theta(t).$$

(Ce majorant doit être indépendant du paramètre n*.)*
Alors la fonction v *est intégrable sur* I *et*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b v_n(t)\,dt = \int_a^b v(t)\,dt.$$

❖ I – Problème ❖

On note E*, l'espace vectoriel des fonctions continues de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

$$\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$$

Partie A. Questions de cours

Il est nécessaire de traiter ces deux questions avant d'aborder la suite du problème.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions $y \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telles que

$$y(0) = y'(1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in [0,1], \quad \lambda y''(x) + y(x) = 0.$$

☞ *On distinguera les cas* $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ *et* $\lambda > 0$.

2. Soient $a \in [0,1]$ et h, une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$. Donner une condition suffisante sur h pour que la fonction

$$H = \left[x \mapsto \int_a^x h(t)\,dt\right]$$

soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Préciser la dérivée de H dans ce cas.

Partie B. Une transformation intégrale

3. a. Soit $x_0 \in [0,1]$. Tracer le graphe de la fonction

$$[t \mapsto \min(x_0, t)]$$

pour $t \in [0,1]$.

3. b. Tracer le graphe de la fonction

$$\left[x \mapsto \int_0^1 \min(x,t)\,dt\right]$$

pour $x \in [0,1]$. On précisera les tangentes en $x = 0$ et $x = 1$.

Pour toute fonction $f \in \mathrm{E}$*, on définit une nouvelle fonction* $T(f)$ *en posant*

$$\forall\, x \in [0,1], \quad T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t)\, f(t)\,dt.$$

.

4. a. Démontrer que $T(f)$ est bien définie, puis que $T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ en précisant l'expression de $[T(f)]'(x)$ et les valeurs de $T(f)(0)$ et de $[T(f)]'(1)$.

4. b. Démontrer que $T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et que

$$\forall\, x \in [0,1], \qquad [T(f)]''(x) = -f(x).$$

5. On a défini plus haut une application

$$T : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$$

qui est clairement linéaire.

Cet endomorphisme T est-il surjectif ? injectif ?

6. On note A, l'ensemble des applications G de classe $\mathscr{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$G(0) = G'(1) = 0.$$

6. a. Démontrer que A est un sous-espace de E.

6. b. Soit $G \in A$, une fonction affine. Que dire de G ?

6. c. Soit $G \in A$. Calculer $T(G'')$.

6. d. En déduire que $\operatorname{Im} T = A$.

Partie C. Étude spectrale

Un réel λ *est une* ***valeur propre*** *de* T *lorsqu'il existe au moins une fonction* $f \in \mathrm{E}$ non identiquement nulle *telle que*

$$T(f) = \lambda f. \qquad (\star)$$

Le ***sous-espace propre*** *associé à* λ *est alors le noyau de* $(T - \lambda I_{\mathrm{E}})$*, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions* $f \in \mathrm{E}$ *qui vérifient la propriété* $(\star)$*.*

7. Déterminer les valeurs propres de T ainsi que les sous-espaces propres associés.

On munit l'espace E *de la norme* $\|\cdot\|_\infty$ *définie par*

$$\forall\, f \in \mathrm{E}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \big|f(x)\big|.$$

(On ne demande pas de justifier que cette application est bien une norme sur E*.)*
La norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ *est notée* $|||\cdot|||$*.*

8. *Dans cette question seulement*, on suppose que l'endomorphisme T est continu. Démontrer que $|||T||| \geqslant |\lambda|$ pour toute valeur propre λ de T.

☞ *On comparera* $\|T(f_0)\|_\infty$ *et* $\|f_0\|_\infty$ *pour un vecteur propre* $f_0 \in \mathrm{E}$ *associé à* λ*.*

9. a. Soit $f \in \mathrm{E}$. Démontrer que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \big|T(f)(x)\big| \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

9. b. En déduire que l'endomorphisme T est continu et que $|||T||| \leqslant 1/2$.

10. Démontrer que $|||T||| = 1/2$.

❖ II – Problème ❖

Partie A. Questions de cours

1. Donner (sans justification) un équivalent de $\ell n\, t$ au voisinage de $t = 1$.

2. Soit α, un réel strictement positif.

2. a. Donner (sans justification) le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $h = 0$ de $(1+h)^\alpha$.

2. b. En déduire un équivalent de $1 - t^\alpha$ lorsque t tend vers 1.

3. Donner (sans justification) une condition sur le réel β pour que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\beta}$$

converge.

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on considère la fonction ψ_p définie par

$$\forall\, 0 < t < 1, \quad \psi_p(t) = -t^p \ln t$$

ainsi que les fonctions Ψ_p définies par

$$\forall\, 0 < t < 1, \quad \Psi_p(t) = \sum_{k=0}^{p} \psi_k(t)$$

et la fonction Ψ définie par

$$\forall\, 0 < t < 1, \quad \Psi(t) = \frac{-\ln t}{1-t}.$$

4. a. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, démontrer que ψ_p est intégrable sur $]0,1[$.

4. b. Démontrer que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \psi_p(t)\,dt = \frac{1}{(p+1)^2}.$$

4. c. Démontrer que Ψ est intégrable sur $]0,1[$ et que

$$\int_0^1 \Psi(t)\,dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Partie B. Convergence d'une suite

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose

$$\forall\, 0 \leqslant t < 1, \quad f_n(t) = \frac{1-t^{1/n}}{(1-t)^{1+1/n}}.$$

et

$$\gamma_n = \int_0^1 \frac{1-t^{1/n}}{(1-t)^{1+1/n}}\,dt.$$

L'objectif de ce problème est de prouver que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0, puis de calculer un équivalent de γ_n.

5. Justifier la convergence de l'intégrale γ_n pour tout $n \geqslant 2$.

6. a. Sachant que $e^u \leqslant 1$ pour tout $u \leqslant 0$, comparer les intégrales

$$\int_0^u e^s\,ds \qquad \text{et} \qquad \int_0^u 1\,ds$$

pour $u \leqslant 0$.

6. b. Au moyen d'une nouvelle intégration, en déduire que

$$\forall\, u \leqslant 0, \quad 1+u \leqslant e^u \leqslant 1+u+\frac{u^2}{2}.$$

7. Démontrer que, pour tout réel $0 < t < 1$ et pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$-\frac{\ln t}{n} - \frac{\ln^2 t}{2n^2} \leqslant 1 - t^{1/n} \leqslant -\frac{\ln t}{n}.$$

8. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\forall\, t \in]0,1[, \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{-\ln t}{2(1-t)^{3/2}}.$$

9. En déduire que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0.

Partie C. Calcul d'un équivalent

Quels que soient les entiers $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, 0 < t < 1, \quad \varphi_{n,p}(t) = \frac{\ln^p t}{(1-t)^{1+1/n}}.$$

10. Démontrer que les fonctions $\varphi_{n,p}$ sont intégrables sur $]0,1[$, quels que soient les entiers $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 1$.

11. En appliquant le Théorème de convergence dominée, déterminer la limite de

$$\int_0^1 \varphi_{n,p}(t)\,dt$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

12. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$-\int_0^1 \frac{\varphi_{n,1}(t)}{n} + \frac{\varphi_{n,2}(t)}{2n^2}\,dt \leqslant \gamma_n \leqslant -\int_0^1 \frac{\varphi_{n,1}(t)}{n}\,dt.$$

13. Démontrer que

$$\gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi^2}{6n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

❖ III – Problème ❖

Dans ce sujet, un vecteur de $\mathbb{R}[X]$ désignera aussi bien un polynôme que l'application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui lui est associée.

Partie A. Une famille de polynômes

On considère l'application $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad w(x) = e^{-x^2}.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note H_n, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$$

où $w^{(n)}$ désigne, comme d'habitude, la dérivée n-ième de w. On rappelle que, par convention, $w^{(0)} = w$ et donc que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad H_0(x) = 1.$$

1. Calculer les expressions $H_1(x)$, $H_2(x)$ et $H_3(x)$.

2. a. Démontrer la relation suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$$

2. b. Déduire de cette relation que H_n est un polynôme de degré n et de même parité que n, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$. On précisera le coefficient dominant de H_n.

Partie B. Une structure euclidienne

Étant données deux applications polynomiales f *et* g, *on pose*

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx.$$

et enfin $\|f\| = \sqrt{\langle f \mid f \rangle}$.

3. Démontrer que l'intégrale généralisée $\langle f \mid g \rangle$ est convergente, quels que soient f et g dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Démontrer que l'application $(f, g) \mapsto \langle f \mid g \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
5. a. Démontrer la relation suivante à l'aide d'une intégration par parties.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, P \in \mathbb{R}[X], \qquad \langle P' \mid H_{n-1} \rangle = \langle P \mid H_n \rangle.$$

5. b. En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \langle P \mid H_n \rangle = 0.$$

5. c. Démontrer que la famille $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$.
6. a. Démontrer que $\|H_n\|^2 = \langle H_n^{(n)} \mid H_0 \rangle$.
6. b. Exprimer $\|H_n\|$ en fonction de n et de $\|H_0\|$.

Partie C. Un endomorphisme auto-adjoint

On notera Id, *l'identité sur* $\mathbb{R}[X]$.
On note u, Φ *et* Ψ, *les applications de* $\mathbb{R}[X]$ *dans* $\mathbb{R}[X]$ *définies par*

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \qquad \begin{aligned} u(P) &= -P'' + 2XP' + P, \\ \Phi(P) &= 2XP - P', \\ \Psi(P) &= P'. \end{aligned}$$

Ainsi, par exemple,

$$\Phi(P)(x) = 2xP(x) - P'(x)$$

pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$.

7. Démontrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et vérifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par u.
8. a. Établir que

$$\Phi \circ \Psi = u - \mathrm{Id} \quad \text{et que} \quad \Psi \circ \Phi = u + \mathrm{Id}.$$

8. b. En déduire que

$$u \circ \Phi - \Phi \circ u = 2\Phi.$$

9. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $u(P) = \lambda P$. Démontrer que

$$u\big(\Phi(P)\big) = (\lambda + 2)\Phi(P).$$

10. Démontrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, le polynôme H_k est un vecteur propre de u et déterminer la valeur propre associée.
11. Soient P et Q, deux vecteurs de $\mathbb{R}[X]$.
11. a. Démontrer que

$$\langle P' \mid Q' \rangle = \langle u(P) - P \mid Q \rangle.$$

11. b. En déduire que

$$\langle u(P) \mid Q \rangle = \langle P \mid u(Q) \rangle.$$

❖ IV – Problème ❖

On considère un segment $[a, b]$ *(avec* $a < b$*), une fonction* f *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[a, b]$ *et une fonction* g *continue par morceaux sur* $[a, b]$. *Il existe donc une subdivision*

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = b$$

et des fonctions $g_0, \ldots, g_{n-1}$ *telles que*

$$\forall\, 0 \leqslant k < n,\ \forall\, \alpha_k < t < \alpha_{k+1}, \quad g_k(t) = g(t),$$

chaque fonction g_k *étant continue sur le segment* $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$.
Pour tout $x \in [a, b]$, *on pose*

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

et pour tout $0 \leqslant k < n$, *on note* G_k, *la primitive de* g_k *telle que* $G_k(\alpha_k) = G(\alpha_k)$.

1. Pourquoi la fonction G est-elle bien définie sur $[a, b]$?
2. Démontrer que, pour tout $0 \leqslant k < n$, la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$.
3. Comment justifier l'existence des fonctions G_k ?
4. Soit $0 \leqslant k < n$.
4. a. Démontrer que

$$\forall\, x \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}], \quad G(x) = G_k(x).$$

4. b. Démontrer que la fonction G_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$.
4. c. La fonction G est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$?
5. Démontrer que, pour tout $0 \leqslant k < n$,

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f'(t)G(t)\,dt = \big[f(t)G_k(t)\big]_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} - \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t)g_k(t)\,dt.$$

6. En déduire que

$$\int_a^b f'(t)G(t)\,dt = \big[f(t)G(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

Solution I ❀ Opérateur à noyau

Partie A. Questions de cours

1. Pour $\lambda = 0$, la seule solution est évidemment la fonction nulle.

❧ Pour $\lambda < 0$, on pose $\omega = 1/\sqrt{-\lambda} > 0$ et l'équation devient
$$\forall\, x \in [0,1], \quad y''(x) - \omega^2 y(x) = 0.$$
La solution générale est de la forme
$$y(x) = A \operatorname{ch} \omega x + B \operatorname{sh} \omega x$$
et les contraintes se traduisent par
$$y(0) = A = 0 \quad \text{et par} \quad y'(1) = B\omega \operatorname{ch} \omega = 0$$
donc $A = B = 0$ (puisque $\omega > 0$ et $\operatorname{ch} \omega > 0$).

À nouveau, la seule solution est la fonction nulle.

> *Pour tenir compte des conditions aux limites imposées, il est beaucoup plus agréable d'écrire la solution générale comme on l'a fait plutôt que sous la forme (équivalente !) traditionnelle*
> $$y(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}.$$

❧ Pour $\lambda > 0$, on pose $\omega = 1/\sqrt{\lambda} > 0$ et l'équation devient
$$\forall\, x \in [0,1], \quad y''(x) + \omega^2 y(x) = 0.$$
La solution générale est cette fois de la forme
$$y(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$$
et les contraintes se traduisent cette fois par
$$y(0) = A = 0 \quad \text{et par} \quad y'(1) = B\omega \cos \omega = 0.$$

Cette fois, deux cas se présentent.

Premier cas. Si $\cos \omega \neq 0$, alors $A = B = 0$ et, une fois de plus, la seule solution est la fonction nulle.

Second cas. Si $\cos \omega = 0$, alors $A = 0$ et B est quelconque. Comme $\omega > 0$, la condition $\cos \omega = 0$ équivaut à
$$\exists\, k \in \mathbb{N}, \qquad \omega = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

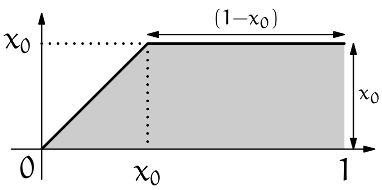
❧ **Conclusion générale.**

Ou bien il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que
$$\lambda = \frac{1}{(\pi/2 + k\pi)^2}$$
et dans ce cas, y est une solution du problème posé si, et seulement si, il existe un réel B tel que
$$\forall\, x \in [0,1], \quad y(x) = B \sin\Big(\frac{\pi}{2} + k\pi\Big)x.$$
Ou bien la fonction nulle est la seule solution du problème posé.

2. D'après le Théorème fondamental, si h est continue sur $[0,1]$, alors H est une primitive de h : dans ce cas, H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et $H' = h$.

Partie B. Une transformation intégrale

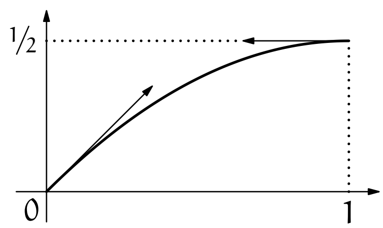
3. a. Pour $0 \leqslant t \leqslant x_0$, la fonction prend la valeur t ; pour $x_0 \leqslant t \leqslant 1$, elle prend la valeur x_0.



3. b. Il s'agit de calculer l'aire d'un trapèze : c'est le produit de la moyenne des bases par la hauteur.
$$\int_0^1 \min(x_0, t)\, dt = \frac{1 + (1 - x_0)}{2} \cdot x_0 = x_0 - \frac{x_0^2}{2}$$
On reconnaît un polynôme du second degré dont le coefficient dominant est négatif : le graphe est celui d'une parabole tournée vers le bas.

La tangente à l'origine est clairement la droite d'équation $y = x$.

Les racines sont 0 et 2, donc l'abscisse de l'axe de symétrie est 1 (milieu des racines). Par conséquent, la tangente en $x = 1$ est horizontale (tangente au sommet de la parabole).



4. a. Pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $[t \mapsto \min(x,t)]$ et la fonction f sont continues sur $[0,1]$, donc la fonction intégrande est continue sur le segment $[0,1]$ et l'intégrale $T(f)(x)$ est bien définie. La fonction $T(f)$ est donc bien définie sur $[0,1]$.

❧ D'après la relation de Chasles, pour tout $x \in [0,1]$,
$$T(f)(x) = \int_0^x tf(t)\, dt + x \int_x^1 f(t)\, dt.$$
Les fonctions f et $[t \mapsto tf(t)]$ sont continues sur $[0,1]$, donc les fonctions
$$\Big[x \mapsto \int_0^x tf(t)\, dt\Big] \quad \text{et} \quad \Big[x \mapsto \int_x^1 f(t)\, dt\Big]$$
sont des primitives de $[t \mapsto tf(t)]$ et de $-f$ respectivement (Théorème fondamental). La fonction $T(f)$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et, pour tout $x \in [0,1]$,
$$\begin{aligned}[T(f)]'(x) &= xf(x) + \int_x^1 f(t)\, dt + x\big[-f(x)\big]\\ &= \int_x^1 f(t)\, dt.\end{aligned}$$
❧ Il est alors clair que $T(f)(0) = [T(f)]'(1) = 0$.

4. b. D'après l'expression de la dérivée $[T(f)]'$ trouvée à la question précédente et le Théorème fondamental, la fonction $[T(f)]'$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est $-f$.

Autrement dit, $T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et

$$\forall\, x \in [0,1], \quad [T(f)]''(x) = -f(x).$$

5. On vient de démontrer que $T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^2$. Comme il existe des fonctions continues qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^2$, cela prouve que T n'est pas surjective.

❧ Si $T(f)$ est la fonction nulle, alors **[4.b.]**

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = -[T(f)]''(x) = 0.$$

Le noyau de T est donc réduit à la fonction nulle et l'application T est injective.

6. a. L'application de $\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\big[G \mapsto \big(G(0), G'(1)\big)\big]$$

est clairement linéaire et son noyau est A. Par conséquent, A est un sous-espace de $\mathscr{C}^2([0,1])$ et a fortiori un sous-espace de E.

6. b. Si G est une fonction affine, alors

$$\forall\, x \in [0,1], \quad G(x) = G(0) + xG'(1).$$

Par conséquent, si $G \in A$, alors G est la fonction nulle.

6. c. Si $G \in A$, alors $G'' \in E$ et **[4.a.]** $T(G'')$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ dont la dérivée seconde est $-G''$. Par conséquent, $T(G'') + G$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ dont la dérivée seconde est nulle : c'est donc une fonction affine.

Or $T(G'') \in A$ d'après **[4.a.]** et $G \in A$ par hypothèse. Comme A est un sous-espace de E d'après **[6.a.]**, la fonction $T(G'') + G$ est une fonction affine qui appartient à A, donc **[6.b.]** c'est la fonction nulle.

En conclusion, $T(G'') = -G$ pour tout $G \in A$.

6. d. On l'a mentionné à la question précédente, on sait depuis **[4.a.]** que l'image de T est contenue dans le sous-espace A.

❧ Réciproquement, d'après la question précédente,

$$\forall\, G \in A, \qquad -G'' \in E \quad \text{et} \quad G = T(-G''),$$

donc l'image de T contient A.

❧ Par double inclusion, l'image de E est égale à A.

Partie C. Étude spectrale

7. Si $T(f) = \lambda f$, alors **[4.b.]**

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \lambda f''(x) = [T(f)]''(x) = -f(x)$$

mais aussi $(\lambda f)(0) = (\lambda f)'(1) = 0$ par **[4.b.]** également.

❧ Si $\lambda = 0$, alors f est nécessairement la fonction nulle **[1.]**, donc 0 n'est pas valeur propre de T.

❧ Pour $\lambda \neq 0$, une fonction f est un vecteur propre de T si, et seulement si, elle n'est pas identiquement nulle et vérifie l'équation différentielle

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \lambda y''(x) + y(x) = 0$$

et les conditions aux limites $y(0) = y'(1) = 0$.

On déduit alors de **[1.]** que les valeurs propres de T sont les réels

$$\lambda_k = \frac{1}{(\pi/2 + k\pi)^2}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et le sous-espace propre associé à λ_k est la droite vectorielle dirigée par la fonction

$$f_k = \left[x \mapsto \sin\Big(\frac{\pi}{2} + k\pi\Big)x\right].$$

8. Si $f_0 \in E$ est un vecteur propre de T associé à λ, alors $T(f_0) = \lambda f_0$, donc

$$|\lambda|\,\|f_0\| = \big\|T(f_0)\big\| \leqslant |||T|||\,\|f_0\|.$$

Or $\|f_0\| > 0$ (puisque $f_0 \neq 0_E$), donc

$$|\lambda| \leqslant |||T|||.$$

9. a. Soit $x \in [0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$\big|f(t)\big| \leqslant \|f\|_\infty$$

et comme $\min(x,t) \geqslant 0$,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|\min(x,t)f(t)\big| \leqslant \min(x,t)\|f\|_\infty.$$

Par inégalité triangulaire et positivité de l'intégration,

$$\begin{aligned} \big|T(f)(x)\big| &\leqslant \int_0^1 \big|\min(x,t)f(t)\big|\,dt \\ &\leqslant \int_0^1 \min(x,t)\|f\|_\infty\,dt \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty \qquad \text{(par [3.b.])} \end{aligned}$$

9. b. On a trouvé un majorant indépendant du paramètre x, on peut donc passer à la borne supérieure et en déduire que

$$\forall\, f \in E, \qquad \big\|T(f)\big\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

Cet encadrement prouve que l'application linéaire T est continue et que $|||T||| \leqslant 1/2$.

> *Pour une application non linéaire, cet encadrement reste intéressant mais il ne prouve pas la continuité ! Il est donc important de rappeler ici que l'application T est bien linéaire.*

10. On reprend la majoration du **[9.a.]** et on cherche les cas d'égalité.

Soit $f_0 = [t \mapsto 1] \in E$. D'après **[3.b.]**,

$$\big\|T(f_0)\big\|_\infty = T(f_0)(1) = \frac{1}{2} \quad \text{alors que} \quad \|f_0\|_\infty = 1.$$

On a donc trouvé un vecteur non nul $f_0 \in E$ tel que

$$\big\|T(f_0)\big\|_\infty = \frac{1}{2}\|f_0\|_\infty,$$

ce qui prouve que $|||T||| \geqslant 1/2$.

D'après la question précédente, $|||T||| = 1/2$.

> *D'après **[7.]** et **[8.]**, on a*
>
> $$\frac{1}{2} = |||T||| > |\lambda_0| = \frac{4}{\pi^2}.$$
>
> *Ainsi, la norme d'une application linéaire continue peut être strictement supérieure à son rayon spectral.*

Solution II ❀ Une suite d'intégrales

Partie A. Questions de cours

1. $\ell n\, t \sim (t-1)$ lorsque t tend vers 1.

2. a.

$$(1+h)^\alpha \underset{h\to 0}{=} 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\, h^2 + o(h^2)$$

2. b. On pose $t = 1+h$: d'après la question précédente,

$$1-(1+h)^\alpha \underset{h\to 0}{\sim} -\alpha h$$

donc

$$1 - t^\alpha \underset{t\to 1}{\sim} \alpha(1-t).$$

3. L'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\beta}$$

converge si, et seulement si, $\beta < 1$.

4. a. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction ψ_p est continue sur l'intervalle ouvert $]0,1[$.

De plus, elle tend vers 0 (= limite finie) au voisinage de 1 (= borne finie), donc elle est intégrable au voisinage de 1.

Enfin, comme t^p est bornée au voisinage de $t=0$,

$$\psi_p(t) \underset{t\to 0}{=} \mathcal{O}(\ell n\, t)$$

et comme ℓn est intégrable au voisinage de 0, on en déduit par comparaison que ψ_p est intégrable au voisinage de 0.

> *Pour $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction ψ_p tend vers 0 au voisinage de 0, ce qui prouve l'intégrabilité au voisinage de 0 (même propriété qu'au voisinage de 1).*
> *En revanche, la fonction ψ_0 tend vers $+\infty$ au voisinage de 0, il faut trouver un autre argument (l'intégrabilité de ℓn, fonction de référence, au voisinage de 0).*

Les fonctions ψ_p sont donc intégrables sur $]0,1[$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

4. b. Soit $p \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $\left[t \mapsto t^{p+1}\right]$ et ℓn sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]0,1[$.

Comme $p+1 > 0$, le produit $t^{p+1}\,\ell n\, t$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0 (croissances comparées).

Par ailleurs, il est clair que $t^{p+1}\,\ell n\, t$ tend vers 0 lorsque t tend vers 1 (il n'y a pas de forme indéterminée).

Enfin, on sait que ψ_p est intégrable sur $]0,1[$, donc l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 (p+1)t^p.\,\ell n\, t\, dt$$

est convergente et il est clair que

$$\int_0^1 t^{p+1}\cdot\frac{1}{t}\, dt = \int_0^1 t^p\, dt$$

est convergente ($p \in \mathbb{N}$).

D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 (p+1)t^p.\,\ell n\, t\, dt = (0-0) - \int_0^1 t^{p+1}\cdot\frac{1}{t}\, dt = -\int_0^1 t^p\, dt = \frac{-1}{p+1}.$$

On en déduit que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \psi_p(t)\, dt = \frac{1}{(p+1)^2}.$$

4. c. On travaille sur l'intervalle ouvert $I =]0,1[$.

❧ La fonction Ψ est continue sur l'intervalle ouvert I.

Lorsque t tend vers 0, on a $\Psi(t) \sim -\ell n\, t$ et on sait que ℓn est intégrable au voisinage de 0 (fonction de référence), donc Ψ est intégrable au voisinage de 0.

Lorsque t tend vers 1, d'après **[1.]**,

$$\Psi(t) \sim \frac{-(t-1)}{1-t} = 1$$

donc Ψ est intégrable au voisinage de 1 (limite finie en une borne finie).

Ainsi, la fonction Ψ est bien intégrable sur l'intervalle $I =]0,1[$.

❧ D'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction Ψ_p est intégrable sur I en tant que combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I.

❧ D'après la formule de la somme géométrique,

$$\forall\, t \in I, \quad \Psi_p(t) = \frac{-(1-t^{p+1})\,\ell n\, t}{1-t}$$

et il est alors clair que

$$\forall\, t \in I, \quad \lim_{p\to+\infty} \Psi_p(t) = \frac{-\ell n\, t}{1-t} = \Psi(t).$$

❧ Il est également clair que la fonction Ψ est continue sur I.

❧ Fixons maintenant $t \in I$ et $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\left|\Psi_p(t)\right| = (1-t^{p+1})\left|\Psi(t)\right| \leqslant \left|\Psi(t)\right|.$$

On a trouvé un majorant indépendant du paramètre p et on a déjà démontré que ce majorant était intégrable sur I.

Nous pouvons donc appliquer le Théorème de convergence dominée, qui prouve que la suite de terme général

$$\int_0^1 \Psi_p(t)\, dt = \sum_{k=0}^{p} \int_0^1 -t^p\,\ell n\, t\, dt = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{(p+1)^2}$$

converge vers

$$\int_0^1 \Psi(t)\, dt.$$

Autrement dit,

$$\int_0^1 \frac{-\ell n\, t}{1-t}\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Partie B. Convergence d'une suite

5. Soit $n \geqslant 2$. Alors $\alpha = 1/n \leqslant 1/2 < 1$ et la fonction f_n est clairement continue sur l'intervalle $[0, 1[$. D'après **[2.b.]**, lorsque t tend vers 1,

$$f_n(t) \sim \frac{(1/n)(1-t)}{(1-t)^{1+1/n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1-t)^{1/n}}.$$

Comme $\beta = 1/n < 1$, on déduit de **[3.]** et du théorème de comparaison que la fonction f_n est intégrable au voisinage de 1.

Les fonctions f_n sont donc intégrables sur $[0, 1[$ pour tout $n \geqslant 2$ et les intégrales généralisées γ_n sont bien définies pour tout $n \geqslant 2$.

6. a. Comme $u \leqslant 0$, les bornes de l'intégrale sont ici dans l'ordre <u>décroissant</u>. Comme

$$\forall\, u \leqslant s \leqslant 0, \qquad e^s \leqslant 1,$$

on en déduit que

$$\forall\, u \leqslant 0, \quad \int_0^u e^s \, ds \geqslant \int_0^u 1 \, ds.$$

Autrement dit,

$$\forall\, u \leqslant 0, \quad e^u - 1 \geqslant u.$$

6. b. On reprend la même méthode : on a établi que

$$\forall\, u \leqslant s \leqslant 0, \quad 1 + s \leqslant e^s$$

et en intégrant (les bornes étant cette fois encore dans l'ordre <u>décroissant</u>), on en déduit que

$$\forall\, u \leqslant 0, \quad \int_0^u 1 + s \, ds \geqslant \int_0^u e^s \, ds$$

c'est-à-dire

$$\forall\, u \leqslant 0, \quad u + \frac{u^2}{2} \geqslant e^u - 1$$

et finalement

$$\forall\, u \leqslant 0, \quad 1 + u \leqslant e^u \leqslant 1 + u + \frac{u^2}{2}.$$

7. Pour $t \in]0, 1[$, on a $\ell n\, t < 0$ et on peut appliquer l'encadrement précédent au réel

$$u = \frac{\ell n\, t}{n} < 0$$

pour obtenir

$$1 + \frac{\ell n\, t}{n} \leqslant \exp \frac{\ell n\, t}{n} \leqslant 1 + \frac{\ell n\, t}{n} + \frac{\ell n^2\, t}{2n^2}.$$

On en déduit l'encadrement voulu de

$$1 - t^{1/n} = 1 - \exp \frac{\ell n\, t}{n}.$$

8. Pour $t \in]0, 1[$, on a $t^{1/n} \in [0, 1]$, donc $f_n(t) \geqslant 0$ puisque le numérateur et le dénominateur sont tous les deux positifs.

> *Pour majorer simplement un quotient de réels positifs, il suffit de majorer le numérateur et de minorer le dénominateur.*

❧ D'après **[7.]**, le numérateur de $f_n(t)$ est majoré par

$$\frac{-\ell n\, t}{n} \leqslant \frac{-\ell n\, t}{2}$$

(puisque $n \geqslant 2$ et $-\ell n\, t \geqslant 0$). D'autre part, le numérateur de $f_n(t)$ est une fonction croissante de n :

$$(1-t)^{1+1/n} = \exp\Big[\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \underbrace{\ell n(1-t)}_{<0}\Big],$$

donc

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \forall\, 0 \leqslant t < 1, \quad (1-t)^{1+1/n} \geqslant (1-t)^{3/2}.$$

Ainsi, pour $t \in]0, 1[$ et $n \geqslant 2$,

$$\forall\, t \in [0, 1[, \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{-\ell n\, t}{2(1-t)^{3/2}}.$$

9. D'après **[5.]**, les fonctions f_n sont intégrables sur l'intervalle $I =]0, 1[$ pour tout $n \geqslant 2$.

❧ Pour tout $t \in I$, la suite de terme général

$$f_n(t) = \frac{1 - t^{1/n}}{(1-t)^{1+1/n}}$$

converge vers 0. (En effet, le numérateur tend vers $1-1 = 0$ et le dénominateur tend vers $(1-t)^1 > 0$.)

❧ La fonction $[t \mapsto 0]$ est bien sûr continue sur l'intervalle I.

❧ Enfin, on a trouvé **[8.]** une fonction

$$\Theta = \left[t \mapsto \frac{-\ell n\, t}{2(1-t)^{3/2}}\right],$$

indépendante du paramètre $n \geqslant 2$, telle que

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \forall\, t \in I, \quad \big|f_n(t)\big| \leqslant \Theta(t).$$

❧ Il reste à vérifier que cette fonction Θ est bien intégrable sur I.

Tout d'abord, il est clair que Θ est une fonction continue sur I.

Ensuite,

$$\Theta(t) \underset{t \to 0}{\sim} -\ell n\, t,$$

donc Θ est intégrable au voisinage de 0.

Enfin,

$$\Theta(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{1-t}},$$

donc, d'après **[3.]**, la fonction Θ est intégrable au voisinage (gauche) de 1.

❧ Comme la fonction dominante Θ est intégrable sur I, on peut appliquer le Théorème de convergence dominée et en déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \gamma_n = \int_0^1 0 \, dt = 0.$$

Partie C. Calcul d'un équivalent

10. Tout d'abord, chaque fonction $\varphi_{n,p}$ est continue sur l'intervalle $]0,1[$.

> *Dans ce qui suit, les deux entiers n et p sont fixés.*

❧ Lorsque t tend vers 0, on a $\varphi_{n,p}(t) \sim \ell n^p\, t$. Par croissances comparées de $\ell n\, t$ et de t, on sait que

$$\forall\, p \geqslant 1, \quad \ell n^p\, t \underset{t\to 0}{=} o\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\Big).$$

Or $[t \mapsto 1/\sqrt{t}]$ est intégrable au voisinage de $t=0$ (fonction de référence), donc, par comparaison, la fonction $\varphi_{n,p}$ est intégrable au voisinage de $t=0$.

❧ Lorsque t tend vers 1, on déduit de **[1.]** que

$$\varphi_{n,p}(t) \sim \frac{(t-1)^p}{(1-t)^{1+1/n}} = \frac{(-1)^p(1-t)^{p-1}}{(1-t)^{1/n}}.$$

Comme $p \geqslant 1$, le facteur $(-1)^p(1-t)^{p-1}$ est borné (compris entre -1 et 1), donc

$$\varphi_{n,p}(t) \underset{t\to 1}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{(1-t)^{1/n}}\Big).$$

Comme $n \geqslant 2$, on a $1/n \leqslant 1/2 < 1$ et on déduit de **[3.]** que $\varphi_{n,p}$ est intégrable au voisinage de 1.

❧ Ainsi, chaque fonction $\varphi_{n,p}$ est intégrable sur $]0,1[$.

11. Dans cette question, l'entier p est fixé, supérieur à 1.

❧ D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$, la fonction $\varphi_{n,p}$ est intégrable sur l'intervalle $I =]0,1[$.

❧ Pour tout $t \in I$, la suite de terme général $\varphi_{n,p}(t)$ converge vers

$$\nu_p(t) = \frac{\ell n^p\, t}{1-t}.$$

Il est clair que cette fonction ν_p est continue sur I.

❧ Il est aussi clair que

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \forall\, t \in I, \quad \big|\varphi_{n,p}(t)\big| \leqslant \frac{|\ell n\, t|^p}{(1-t)^{3/2}},$$

ce majorant étant indépendant du paramètre n. Il reste donc à démontrer que cette fonction majorante, que nous noterons Θ, est elle aussi intégrable sur l'intervalle I.

❧ Il est clair que Θ est continue sur l'intervalle ouvert $I =]0,1[$.

Elle est intégrable au voisinage de $t=0$ et au voisinage de $t=1$ pour les mêmes raisons que $\varphi_{n,p}$ (cf **[10.]**).

Donc la fonction dominante Θ est intégrable sur $]0,1[$ et on peut appliquer le Théorème de convergence dominée.

En conclusion, pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_{n,p}(t)\, dt = \int_0^1 \frac{\ell n^p\, t}{1-t}\, dt.$$

> *En particulier, pour $p=1$,*
>
> $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_{n,1}(t)\, dt = \frac{-\pi^2}{6}$$
>
> *d'après **[4.c.]**.*

12. On reprend l'encadrement du **[7.]** et on divise par $(1-t)^{1+1/n} > 0$ pour obtenir

$$-\frac{\varphi_{n,1}(t)}{n} - \frac{\varphi_{n,2}(t)}{2n^2} \leqslant f_n(t) \leqslant -\frac{\varphi_{n,1}(t)}{n}$$

quel que soit $t \in]0,1[$. Les fonctions f_n, $\varphi_{n,1}$ et $\varphi_{n,2}$ sont intégrables sur $]0,1[$ (par **[5.]** et **[10.]**), donc on peut intégrer terme à terme cet encadrement et en déduire que

$$-\int_0^1 \frac{\varphi_{n,1}(t)}{n} + \frac{\varphi_{n,2}(t)}{2n^2}\, dt \leqslant \gamma_n \leqslant -\int_0^1 \frac{\varphi_{n,1}(t)}{n}\, dt.$$

13. D'après **[11.]**,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_{n,1}(t)\, dt = -\pi^2/6 \neq 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_{n,2}(t)\, dt = \int_0^1 \frac{\ell n^2\, t}{1-t}\, dt \in \mathbb{R},$$

donc

$$-\int_0^1 \frac{\varphi_{n,1}(t)}{n}\, dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6n}$$

et

$$-\int_0^1 \frac{\varphi_{n,2}(t)}{2n^2}\, dt \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) = o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

L'encadrement de **[12.]** nous donne donc

$$\gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi^2}{6n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

ou, si on préfère,

$$\gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6n}.$$

Solution III ❀ Polynômes de Hermite

Partie A. Une famille de polynômes

1. On calcule successivement $w'(x)$, $w''(x)$ et $w^{(3)}(x)$ (les calculs doivent figurer sur la copie) et on en déduit que

$$H_1 = 2X, \quad H_2 = 4X^2 - 2, \quad H_3 = 8X^3 - 12X.$$

2. a. On part de la définition de H_n

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$$

et on dérive ce produit : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= (-1)^n e^{x^2}\big[2xw^{(n)}(x) + w^{(n+1)}(x)\big] \\ &= 2xH_n(x) - (-1)^{n+1}e^{x^2}w^{(n+1)}(x) \\ &= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x). \end{aligned}$$

2. b. D'après les calculs précédents, on conjecture que H_n est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est égal à 2^n : cette conjecture est validée pour $0 \leqslant n \leqslant 3$.

De même, on voit bien que H_n est de même parité que n pour $0 \leqslant n \leqslant 3$.

HR : On suppose que notre conjecture est vraie et que H_n est de même parité que n pour un entier $n \geqslant 3$.

❧ D'après la relation de récurrence **[2.a.]**,

$$H_{n+1} = 2X(2^n X^n + \cdots) - (\cdots)$$

(où les $\cdots$ indiquent des termes dont le degré est strictement inférieur à n) et par conséquent

$$H_{n+1} = 2^{n+1}X^{n+1} + \cdots$$

(où les $\cdots$ indiquent cette fois des termes dont le degré est inférieur à n). Cela prouve que $\deg H_{n+1} = n+1$ et que le coefficient dominant de H_{n+1} est égal à 2^{n+1}.

❧ D'autre part, comme le facteur $2X$ est un polynôme impair, le produit $2XH_n$ est de parité opposée à celle de l'entier n.

De plus, comme H_n est de même parité que n (par HR), le polynôme dérivé H_n' est de parité opposée à celle de n.

Par différence, $H_{n+1} = 2XH_n - H_n'$ est de parité opposée à celle de n, donc de même parité que $(n+1)$.

❧ Le résultat souhaité est ainsi démontré par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie B. Une structure euclidienne

3. Soient f et g dans $\mathbb{R}[X]$: le produit $f \cdot g \cdot w$ est évidemment une application continue sur $\mathbb{R}$ et il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$f(x)g(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(x^d),$$

donc

$$f(x).g(x).w(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(x^d e^{-x^2}) \underset{x\to\pm\infty}{=} o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

car

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |x|^n e^{-x^2} = \exp\big[-x^2 + n\,\ell n|x|\big] \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$

par croissances comparées de x^2 et de $\ell n\, x$.

L'application $f \cdot g \cdot w$ est donc intégrable aux voisinages de $\pm\infty$ et donc intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que l'intégrale généralisée $\langle f \,|\, g \rangle$ est convergente.

4. On a démontré **[3.]** que $\langle \cdot|\cdot \rangle$ était une application de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$.

L'application $\langle \cdot|\cdot \rangle$ est évidemment bilinéaire et symétrique sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.

Pour tout $f \in \mathbb{R}[X]$, il est clair que $\langle f \,|\, f \rangle \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive).

Enfin, si $\langle f \,|\, f \rangle = 0$, alors $f^2 \cdot w$ est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$ dont l'intégrale est nulle. Par conséquent,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f^2(x).w(x) = 0$$

et comme $w(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

Ainsi, $\langle \cdot|\cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire, sur $\mathbb{R}[X]$.

5. a. Par définition du produit scalaire et de H_{n-1},

$$\begin{aligned}\langle P' \,|\, H_{n-1} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)(-1)^{n-1} e^{x^2} w^{(n-1)}(x) e^{-x^2}\, dx \\ &= (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) w^{(n-1)}(x)\, dx.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant intégrer par parties.

❧ Il est clair que les deux fonctions P et $w^{(n-1)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, +\infty[$ et, comme on l'a justifié au **[3.]**,

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) \cdot w^{(n-1)}(x) = 0.$$

> *On sait déjà* **[3.]** *que les deux intégrales généralisées*
>
> $$\langle P' \,|\, H_{n-1} \rangle \quad \textit{et} \quad \langle P \,|\, H_n \rangle$$
>
> *sont convergentes, la formule d'intégration par parties ne nous apprend rien à ce sujet.*

D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\langle P' \,|\, H_{n-1} \rangle &= (0-0) - (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x).w^{(n)}(x)\, dx \\ &= \langle P \,|\, H_n \rangle.\end{aligned}$$

puisque, par définition de H_n,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \cdot w^{(n)}(x) = (-1)^n P(x) H_n(x) w(x).$$

5. b. On déduit du résultat précédent que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \langle P \,|\, H_n \rangle = \langle P^{(k)} \,|\, H_{n-k} \rangle$$

et donc en particulier que

$$\langle P \,|\, H_n \rangle = \langle P^{(n)} \,|\, H_0 \rangle.$$

Si $\deg P < n$, alors $P^{(n)} = 0$ et donc $\langle P \,|\, H_n \rangle = 0$.

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \langle P \,|\, H_n \rangle = 0.$$

5. c. On sait **[2.b.]** que $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille échelonnée en degré :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \deg H_k = k,$$

donc $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

❧ Soient $0 \leqslant i < j \leqslant n$. Comme $i < j$ et que i et j sont *entiers*, alors $i \leqslant j-1$ et donc

$$H_i \in \mathbb{R}_i[X] \subset \mathbb{R}_{j-1}[X].$$

D'après la question précédente, $\langle H_i \,|\, H_j \rangle = 0$.

La base $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot|\cdot \rangle$.

6. a. D'après **[5.b.]**,

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad \langle P \,|\, H_n \rangle = \langle P^{(n)} \,|\, H_0 \rangle.$$

En particulier,

$$\|H_n\|^2 = \langle H_n \,|\, H_n \rangle = \langle H_n^{(n)} \,|\, H_0 \rangle.$$

6. b. Par **[2.b.]**, le degré du polynôme H_n est égal à n, donc $H_n^{(n)}$ est constant ; le coefficient dominant de H_n est égal à 2^n, donc

$$H_n^{(n)} = 2^n.n! = 2^n.n! \cdot H_0$$

et finalement

$$\|H_n\| = \sqrt{2^n.n!}\,\|H_0\|.$$

Partie C. Un endomorphisme auto-adjoint

7. Il est clair que, quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, l'expression $u(P)$ est un polynôme. On vérifie sans peine que u est bien linéaire.

L'application u est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

❧ Si $\deg P \leqslant n$, alors

$$\deg(XP') = 1 + \deg P' \leqslant 1 + (\deg P - 1) = \deg P \leqslant n$$

et $\deg(P'') \leqslant \deg P - 2 \leqslant n$, donc $\deg u(P) \leqslant n$.

Le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est donc stable par u, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

8. a. Comme $\Psi(P) = P'$, alors

$$\begin{aligned}\Phi\big(\Psi(P)\big) &= \Phi(P') = 2XP' - P'' = u(P) - P \\ &= (u - \mathrm{Id})(P).\end{aligned}$$

De même, comme $\Phi(P) = 2XP - P'$, alors

$$\begin{aligned}\Psi\big(\Phi(P)\big) &= \Psi(2XP - P') = 2P + 2XP' - P'' = P + u(P) \\ &= (\mathrm{Id} + u)(P).\end{aligned}$$

Comme ces relations sont vraies pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on en déduit que

$$\Phi \circ \Psi = u - \mathrm{Id} \quad \text{et que} \quad \Psi \circ \Phi = u + \mathrm{Id}\,.$$

8. b. D'après la question précédente,

$$u = \mathrm{Id} + \Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi - \mathrm{Id}\,.$$

En composant à droite par Φ la première expression de u et à gauche par Φ la seconde expression, on en déduit que

$$u \circ \Phi = \Phi + \Phi \circ \Psi \circ \Phi \quad \text{et} \quad \Phi \circ u = \Phi \circ \Psi \circ \Phi - \Phi$$

et donc (par différence) que

$$u \circ \Phi - \Phi \circ u = 2\Phi.$$

9. Si $u(P) = \lambda \cdot P$, on déduit de la relation précédente que

$$\begin{aligned}u\big(\Phi(P)\big) &= \Phi\big(u(P)\big) + 2\Phi(P) \\ &= \Phi(\lambda P) + 2\Phi(P) = (\lambda + 2) \cdot \Phi(P)\end{aligned}$$

par linéarité de Φ.

10. Commençons par observer que $H_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

> *Par définition, un vecteur propre est distinct du vecteur nul. Cette remarque liminaire nous permet de ne pas revenir sur ce point dans la suite.*

Comme $\deg H_0 = 0$, il est clair que $\Phi(H_0) = H_0$. Donc H_0 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1.

HR : supposons que, pour un entier $k \in \mathbb{N}$, le polynôme H_k soit un vecteur propre de u associé à la valeur propre $2k + 1$.

Par définition de Φ et **[2.a.]**, on a $H_{k+1} = \Phi(H_k)$ et, d'après **[9.]**,

$$\begin{aligned}u(H_{k+1}) &= u\big(\Phi(H_k)\big) = \big[(2k+1) + 2\big]\Phi(H_k) \\ &= (2k+3)H_{k+1},\end{aligned}$$

ce qui prouve que H_{k+1} est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $(2k + 3)$.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le polynôme H_k est un vecteur propre de u associé à $(2k + 1)$.

11. a. Par définition,

$$\langle\, P' \,|\, Q' \,\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)e^{-x^2}Q'(x)\,dx.$$

Nous allons intégrer par parties.

❧ Les fonctions $f = [x \mapsto P'(x)e^{-x^2}]$ et $g = Q$ sont évidemment de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

❧ D'après **[3.]**, les deux produits $f'.g$ et $f.g'$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (produit de la fonction w par une fonction polynomiale).

❧ D'après **[3.]**,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x).g(x) = 0.$$

On déduit donc de la formule d'intégration par parties que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).g'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x).g(x)\,dx$$

et comme

$$f'(x) = \big[P''(x) - 2xP'(x)\big]e^{-x^2},$$

on en déduit que

$$\langle\, P' \,|\, Q' \,\rangle = \langle\, u(P) - P \,|\, Q \,\rangle.$$

11. b. D'après la question précédente,

$$\langle\, u(P) \,|\, Q \,\rangle = \langle\, P \,|\, Q \,\rangle + \langle\, P' \,|\, Q' \,\rangle.$$

En intervertissant P et Q,

$$\begin{aligned}\langle\, P \,|\, u(Q) \,\rangle &\overset{\star}{=} \langle\, u(Q) \,|\, P \,\rangle \\ &= \langle\, Q \,|\, P \,\rangle + \langle\, Q' \,|\, P' \,\rangle \\ &\overset{\star}{=} \langle\, P \,|\, Q \,\rangle + \langle\, P' \,|\, Q' \,\rangle = \langle\, u(P) \,|\, Q \,\rangle\end{aligned}$$

où on a utilisé deux fois $(\star)$ la symétrie du produit scalaire.

Solution IV ❀ Intégration par parties généralisée

1. Pour tout $x \in [a, b]$, le segment $[a, x]$ est contenu dans $[a, b]$, donc la fonction g est continue par morceaux sur le segment $[a, x]$ et l'intégrale

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

est donc bien définie.

2. Soit $a_k \in \,]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$. D'après la relation de Chasles,

$$G(x) = G(a_k) + \int_{a_k}^x g(t)\,dt.$$

Par hypothèse, la fonction g est continue sur l'intervalle $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, donc la fonction

$$\left[x \mapsto \int_{a_k}^{x} g(t)\,dt\right]$$

est une primitive de g sur $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ (Théorème fondamental). Sur cet intervalle ouvert, la fonction G est donc la somme d'une constante et d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, donc G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur chaque intervalle ouvert $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$.

3. Chacune des fonctions g_k est continue sur l'intervalle $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, donc (Théorème fondamental à nouveau) la fonction

$$\left[x \mapsto G(\alpha_k) + \int_{\alpha_k}^{x} g_k(t)\,dt\right]$$

est la primitive de g_k sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ qui prend la valeur $G(\alpha_k)$ au point $x = \alpha_k$.

4. a. D'après **[3.]**, pour tout $x \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$,

$$G_k(x) = G(\alpha_k) + \int_{\alpha_k}^{x} g_k(t)\,dt.$$

L'intervalle ouvert $]\alpha_k, x[$ est contenu dans l'intervalle ouvert $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ et, par construction,

$$\forall\, t \in\,]\alpha_k, \alpha_{k+1}[, \qquad g_k(t) = g(t)$$

donc

$$\forall\, x \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}], \quad \int_{\alpha_k}^{x} g_k(t)\,dt = \int_{\alpha_k}^{x} g(t)\,dt,$$

si bien que, pour tout $x \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$,

$$G_k(x) = G(\alpha_k) + \int_{\alpha_k}^{x} g(t)\,dt = G(x)$$

(relation de Chasles à nouveau).

4. b. En tant que primitive d'une fonction continue sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, la fonction G_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ et

$$\forall\, t \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}], \quad G_k'(t) = g_k(t).$$

4. c. On a justifié plus haut **[2.]** que la fonction G était de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$.

Pour $0 < k < n$, la fonction g admet une limite à gauche (finie) $g(\alpha_k^-)$ et une limite à droite (finie) $g(\alpha_k^+)$ en $x = \alpha_k$. A priori, ces deux limites sont distinctes et dans ce cas, G est dérivable à gauche et à droite en $x = \alpha_k$ avec

$$G_g'(\alpha_k) = g(\alpha_k^-) \neq g(\alpha_k^+) = G_d'(\alpha_k),$$

donc G n'est pas dérivable en $x = \alpha_k$.

De même, pour $0 \leqslant k < n-1$, la fonction g n'est a priori pas continue en $x = \alpha_{k+1}$, donc G est dérivable à gauche et à droite en $x = \alpha_{k+1}$ sans être dérivable en $x = \alpha_{k+1}$ (deux demi-tangentes distinctes).

> *Questions subtiles, mais les réponses ne sont pas contradictoires si on connaît rigoureusement le cours.*

> *Par **[4.a.]**, les fonctions G et G_k coïncident sur le segment $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ et comme G_k n'est définie que sur ce segment (tout comme g_k), la fonction G_k est la restriction de G à $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$.*
>
> *Pour G_k, qui n'est donc définie que sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, la dérivabilité en α_k équivaut donc à la dérivabilité à droite (puisque G_k n'est pas définie à gauche de α_k) et la dérivabilité en α_{k+1} équivaut à la dérivabilité à gauche en α_{k+1} (puisque G_k n'est pas définie à droite de α_{k+1}).*

> *En revanche, G est définie à gauche de α_k (sauf si $k = 0$) et à droite de α_{k+1} (sauf si $k = n-1$), donc — c'est le cours — G est dérivable en α_k si, et seulement si, G est dérivable à gauche et à droite en α_k **et** si les nombres dérivés à gauche et à droite sont **égaux**. Dans le cas contraire, l'existence de deux demi-tangentes différentes fait apparaître un point anguleux en $x = \alpha_k$ sur le graphe de G.*

5. Par **[4.a.]**,

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f'(t)G(t)\,dt = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f'(t)G_k(t)\,dt.$$

Comme f et G_k sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, on peut intégrer par parties :

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f'(t)G_k(t)dt = \big[f(t)G_k(t)\big]_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} - \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t)g_k(t)dt,$$

puisque $G_k' = g_k$ **[4.b.]**.

6. D'après la relation de Chasles,

$$\int_a^b f'(t)G(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f'(t)G(t)\,dt$$

où chaque terme a été étudié au **[5.]**.

❧ D'après **[4.a.]**, pour tout $0 \leqslant k < n$,

$$G_k(\alpha_k) = G(\alpha_k) \quad \text{et} \quad G_k(\alpha_{k+1}) = G(\alpha_{k+1})$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \big[f(t)G_k(t)\big]_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \big[f(t)G(t)\big]_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \\ &= \big[f(t)G(t)\big]_{\alpha_0}^{\alpha_n} \qquad \text{(télescopage)} \\ &= \big[f(t)G(t)\big]_a^b.\end{aligned}$$

❧ D'autre part, pour tout $0 \leqslant k < n$,

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t)g_k(t)\,dt = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t)g(t)\,dt$$

(même raisonnement qu'au **[4.a.]**), si bien que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t)g_k(t)\,dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t)g(t)\,dt \\ &= \int_{\alpha_0}^{\alpha_n} f(t)g(t)\,dt \qquad \text{(télescopage)} \\ &= \int_a^b f(t)g(t)\,dt.\end{aligned}$$

❧ On déduit donc de **[5.]** que

$$\int_a^b f'(t)G(t)\,dt = \big[f(t)G(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

> *Dans le cours, la formule d'intégration par parties est établie en supposant que les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a, b]$. Nous venons de voir qu'il suffit que f et g soient continues sur $[a, b]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$.*